ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.
Über das Vorkommen des Goldes im salzburgischen Erzgebirge;

von

Jos. Rufsegger,

k. k. Betriebsbeamten bei dem k. k. Gold- und Silberbergwerke in Böckstein.

Der Theil der norischen Alpenkette, welcher die südliche Grenze des Herzogthums Salzburg bildet, und sich gegen West an die tirolischen, gegen Ost an die steierisch-kärntnerischen Alpen anschliefst, theilt sich in Bezug der geognostischen Verhältnisse und der Erzführung in zwei, parallel aus Ost in West streichende, Gebirgszüge. Der südliche derselben, die Centralkette, besteht durchgehends aus Granit und Gneifs, allem Ansehen nach der uranfänglichen Bildung zugehörend und von den gegen Nord vorliegenden jüngeren Formationen der Voralpen getrennt durch mächtige Ablagerungen von Glimmerschiefer, hie und da wechsellagernd mit jüngerem Granite, begleitet von körnigem Kalk und Euphotidgebilden. Den westlichen Theil der Centralkette charakterisirt das mächtige Hervortreten des Granites, während dem im östlichen Theile dieses Gebirgszuges der Gneifs durchaus vorherrschend, und ein Hervortreten des, das Grundgebirge bildenden, Granites nur hie und da zu bemerken ist.

Häufige Gange durchziehen das Granit- und Gneifsgebirge, und bilden die charakteristischen Lagerstätte dieser Felsgebilde in Bezug ihrer Metallführung. Die im angrenzenden Granit-Glimmerschiefergebirge aufsetzenden Lagerstätte sind theils Gänge, theils Lager.

Die Metallführung der Gänge des Granit- und Gneifsgebirges beschränkt sich vorzüglich auf das Vorkommen von Gold, Silber, Blei, Kupfer, Antimon, ersteres ausgenommen, fast durchgehends im geschwefelten Zustande.

Die Metallführung der im Granit-Glimmerschiefergebirge aufsetzenden Lagerstätte besteht im Vorkommen von Kupfer-, Blei-, Eisen- und Zink-Sulphuriden, hie und da Silber führend, mit geringem Gehalte an Gold; welches jedoch im gediegenen Zustande hier dieser Felsart fremd ist.

Wesentlich verschieden in Hinsicht der constituirenden Felsarten und der Metallführung, erheben sich nördlich der Centralkette, getrennt von ihr durch das Längenthal der Salzache und die Hochebene von Radstadt, die Voralpen.

Jenes Formationsglied, das die Lagerungsfolge der Centralkette schliefst, beginnt die der Voralpen, nämlich der Glimmerschiefer, mit seinen Ablagerungen von Quarz-, Kalk- und Metall-Sulphuriden.

Ihm folgen die Gebilde der Übergangszeit: Thonschiefer und dichter Kalkstein *(mountain limestone)*; letzterer theils mit ersterem wechsellagernd, theils selbstständig ungeheure Stückgebirge zusammensetzend, und bis zu einer Meereshöhe von 8000 bis 9000 Fufs ansteigend.

Häufig von Lagern begleitet, zeichnet sich auch dieser Gebirgszug durch Metallführung, jedoch auch durch den gänzlichen Mangel an Gold aus, indem sich erstere

auf das Vorkommen von Eisen, Kupfer, Blei, Arsenik, Wismuth, Silber, und, als Seltenheit, auf das von Queck-silber und Kobalt beschränkt.

Das Eisen zum Theil ausgenommen, erscheinen die erwähnten Metalle fast sämmtlich im geschwefelten Zustande, das Silber nur als seltner Begleiter des Bleiglanzes und des Kupferfahlerzes.

Den Zug der Voralpen, in der ganzen Richtung seiner Ausdehnung, begrenzt der Alpenkalk; unmittelbar auf den dichten Kalkstein der Übergangszeit sich lagernd, meist deutlich geschichtet, bildet er die Grundlage der nördlichen Vorberge, ausgedehnte Ablagerungen vom Liaskalk und Liassandstein, Salzthon, Steinsalz, linsenförmigen Thoneisenstein führend.

Den mächtigen Gebilden der Liasformation folgen die Formationen der tertiären Bildungszeit, und Alluvial- und Diluvial-Ablagerungen bilden die Ebenen am Fuſse der groſsen Alpenkette.

Aus diesem kurzen Überblicke der geognostischen Reihenfolge der Felsarten, die das Hochland Salzburgs constituiren, sieht man, daſs dem Zwecke dieser Abhandlung zu Folge der Gegenstand unserer Betrachtung die Gänge des Granit und Gneiſs, und die Lagerstätte des Granit-Glimmerschiefergebirges der Centralkette sind.

Um über ihre Natur, besonders in Bezug ihrer Metallführung, eine allgemeinere Ansicht äuſsern zu können, berühre ich vor Allem die speciellen Localverhältnisse derselben, und wähle dazu jene Puncte, wo in den Seitenthälern der Centralkette durch bestanden habenden, oder noch umgehenden Bergbau dem Geognosten der meiste Aufschluſs wird, und beginne mit jenem Thale, wo gegenwärtig noch auf edle Metalle der ausgedehnteste und interessanteste Bergbau besteht, d. i. unseres salzburgischen Hochlandes.

I. Das Thal Gastein.

Den Hintergrund des, den nördlichen Abhang der Centralkette rechtwinkelig, d. i. aus Süd gegen Nord durchschneidenden, Thales bilden hohe Gebirge, bestehend aus uranfänglichem Gneiſs, der nur hie und da in Bezug der Änderung seiner Textur in Granit übergeht, ohne deſswegen seine geognostische Stellung als Gneiſs zu verlieren Häufige Gänge durchsetzen diese Felsart, unter denen, sowohl in Beziehung des Maſsstabes ihrer Ausdehnung, als in Beziehung ihrer geognostischen Verhältnisse und ihrer Erzführung, jene die interessantesten sind, welche in der Masse des Rathhausberges aufsetzen.

Die Gänge dieses Stückgebirges lassen sich in zwei Classen theilen: in erzführende und in taube. In Bezug ihres Streichens behaupten sie sämmtlich dieselbe Richtung, nämlich aus Nordost in Südwest *h.* 2 bis 3. In Beziehung ihres Verflächens aber verhalten sie sich gerade entgegengesetzt, indem die erzführenden Gänge gegen Südost im Durchschnitt unter einem Winkel von 45° bis 50° fallen, während die tauben Klüfte, hier Lettenklüfte genannt, sich unter einem gleichen Winkel gegen Nordwest in die Teufe senken.

Die Lettenklüfte sind offenbar jüngerer Entstehung, weil sie die erzführenden Gänge durchsetzen und verwerfen. Der Scharrungswinkel dürfte im Durchschnitte 17° betragen. Ihre Ausfüllungsmasse bilden die Trümmer des Gebirgs- und übrigen Gangsgesteins, durch ein thoniges Bindemittel wieder zum neuen Felsen regenerirt. Ihre Mächtigkeit wächst von 1 Fuſs bis zu 1 Lachter. Jede eigenthümliche Metallführung ist diesen Klüften fremd.

Von den erzführenden Gängen unterscheidet man hier Hauptgänge und Nebengänge. Unter ersteren ver-

steht man jene, die sich durch ihre Ausdehnung dem Streichen nach und durch ihre grofse Mächtigkeit vor allen andern auszeichnen; Nebengänge hingegen nennt man die kleinern Klüfte, welche die Gänge in ihrem Liegend- oder Hangendgestein begleiten, ohne jedoch Trümmer derselben zu seyn, und deren im Rathhausberge unzählige sind. Zu den Hauptgängen zählt man vier, nämlich: den Wantschlergang, den Hauptgang, den Liegendhauptgang und den Kreuzstollengang.

In Bezug ihrer Beschaffenheit und ihrer Erzführung verhalten sich beide Arten gleich, und gehören auch unläugbar einer Bildungsperiode an.

Von Nordost gegen Südwest sind die hiesigen Gänge dem Streichen nach über 1300 Klafter weit bekannt. Sie wurden von den Alten an ihrem Ausgehenden in einer Meereshöhe bei 8000 Pariser Fufs gefafst, und seit der undenklichen Zeit des Beginnes des hiesigen Grubenbaues wurden die Baue, von dem höchsten Puncte an gerechnet, wo man noch Spuren alter Gruben bemerkt, über 2000 Pariser Fufs in die Teufe niedergebracht. Das Mundloch des höchsten der gegenwärtig befahren werdenden Stollen hat eine Meereshöhe von 6500 Paris. Fufs. Über seiner Sohle erheben sich dem Verflächen der Gänge nach einige noch im Betriebe stehende Baue bis zu einer Erhöhung über der Meeresfläche von 6800 bis 6900 Pariser Fufs.

In der Richtung ihres Streichens bieten diese Gänge die Erscheinung des Trümmerabsetzens häufig dar, und zeigen in Bezug ihrer gegenseitigen Lage dem Beobachter manchmal die interessantesten Parthien. Die Mächtigkeit der Gänge ist sehr abwechselnd, sie steigt von einigen Zollen bis auf mehrere Lachter.

Ihre Ausfüllung bilden Gneifs, Quarz, und manchmal Granit, oder vielmehr Gneifs mit granitischem Ge-

füge, sehr selten bemerkt man auch Kalkspath. Der Gneifs und Granit der Gänge ist dem des Nebengesteins sehr ähnlich, nur in Bezug der Textur seiner Bestandtheile etwas zarter gebildet. Der Gangquarz ist weifs, und besonders dort, wo er in beträchtlicher Mächtigkeit auftritt, sehr rein. Drusenräume sind für ihn eine ziemlich seltene Erscheinung.

Wo Gneifs und Quarz zugleich die Ausfüllungsmassen bilden, dort zieht sich in den meisten Fällen der letztere am Hangenden oder am Liegenden des Ganges hin, seltener setzt er mitten in der Mächtigkeit desselben auf.

An mehreren Puncten bemerkt man eine förmliche Schichtung der Gangausfüllungsmasse, in welchem Falle Lagen von Quarz und von Gneifs vom Liegend zum Hangend mehrmals wechseln. Die Ausfüllungsmasse ist meistens von deutlichen Saalbändern begleitet, und überall beleuchtet man am Hangend und Liegend ausgezeichneten Besteg.

Die Erzführung ist sowohl dem Gangquarze als dem Ganggneifse eigen, und besteht in:

Gediegenem Golde.

Grauantimon mit gedieg. Golde und göldigem Silber.

Antimonsilber, manchmal ausgezeichnet krystallisirt. Gerade rhombische Säule.

Bleiglanz mit göldigem Silber.

Kupferkies.

Eisenkies.

Beide göldiges Silber haltend, und, jedoch in äusserst geringem Verhältnisse, auch mechanisch beigemengt gediegenes Gold führend.

Arsenikkies. Sehr häufig und manchmal, besonders aber dann, wenn er von Eisenramm begleitet wird, göldiges Silber haltend.

Das Erscheinen der drei ersterwähnten Geschicke edler Metalle, nämlich des gediegenen Goldes, des Grauantimons und des Antimonsilbers, ist eigentlich dem Gangquarze eigen und für denselben charakteristisch, obwohl man diese drei auch im Ganggneiſse, aber äusserst selten findet. Die übrigen Erzgattungen treten sowohl im Gangquarze als im Ganggneiſse auf.

Der Gehalt an gediegenem Golde ist dem Quarze der hiesigen Gänge so eigen, daſs man wohl kaum ein Stück desselben finden könnte, wenn es doch richtig aus der Ausfüllung eines Ganges herstammte, was nicht wenigstens Spuren von gediegenem Golde aufzuweisen hätte.

Als ein Kennzeichen eines guten Gehaltes an Gold hält man die theilweise Färbung des Gangquarzes durch Eisenperoxyd, und nennt ihn hier in diesem Falle *rothrammig*.

Bemerkenswerth ist es auch, daſs die gold- und silberhältigen Antimon-Fossilien im Quarze meist mit gediegenem Golde einbrechen, während das Auftreten von Bleiglanz, wenn nicht auf Mangel, doch auf höchst mittelmäſsigen Gehalt an gediegenem Golde schlieſsen läſst.

Bei weitem der gröſste Theil des im Quarze der Gänge vorkommenden gediegenen Goldes ist selbst dem bewaffneten Auge unsichtbar, und nur manchmal tritt dasselbe sichtbar hervor. Deutliche Krystallbildung habe ich in diesem Falle zu bemerken nie Gelegenheit gehabt, jedoch das manchmal blätterige Vorkommen desselben läſst auch hier nur gewöhnliche Abänderungen der ihm eigenthümlichen hypothetischen Form, des Würfels, vermuthen.

Die auf den Gängen einbrechenden edlen Metallgeschicke gewinnt man als Erze und Pochgänge. Erstere,

durch ihren höhern Gehalt an Gold und Silber von letztern unterschieden, werden zur Lendner Silberhütte abgegeben, und daselbst durch den Verbleiungsprozeſs zu Gute gebracht. Letztere werden auf dem Rathhausberge gepocht, das Pochmehl wird in Röhren 1600 Klafter weit nach Böckstein geführt, und daselbst wird mittelst Stoſsherden der Gehalt des Pochmehls an edlen Metallen in aus Metallsulphuriden bestehenden Schlichen dargestellt.

Jener Schlich, in welchem der Gehalt an gediegenem Golde concentrirt ist, wird dem Amalgamationsprozesse übergeben, die übrigen Schliche aber werden bei der Lendner Hütte durch die Verbleiung auf ihrem Gehalte an göldigem Silber zu Gute gebracht. Der Gehalt der Erze an göldigem Silber ist nach den verschiedenen Gattungen derselben verschieden; die reichsten halten 3 bis 4 Loth im Centner, die ärmsten im Durchschnitte ungefähr 1 Loth. Von den Pochgängen halten 1000 Kübel (ein Kübel hält 2200 salzburg. Kubik-Zolle) im Durchschnitte 1 Mark an gediegenem Golde, 5100 Pf. Schliche und 5 bis 8 Mark an göldigem Silber. Im Jahre 1829 wurden mittelst der Grubenbaue erobert 690 Kübel Erze und 48800 Kübel Pochgänge. Von den letztern wurden 48000 Kübel in den Pochwerken aufgearbeitet, und aus diesem Quantum 41 Mark Mühlgold und 2450 Centner Schliche ausgebracht.

Der Gesammtgehalt an göldigem Silber betrug in den Erzen 100 Mark, in den Schlichen 260 Mark.

Der Gehalt des göldigen Silbers an reinem Golde ist constant pr. Mark 2 Loth.

Das unter dem Namen Mühlgold durch die Amalgamation ausgebrachte gediegene Gold der Pochgänge ist dem Ansehen nach sehr rein, und zeichnet sich durch

seine schöne, intensive Farbe aus. Es hält nur etwas Silber beigemengt, und zwar auf die Mark 2 Loth.

Interessant ist das gleiche Verhältniſs der chemischen Verbindung des Silbers mit dem Golde im göldigen Silber, und das des Goldes mit dem Silber im Mühlgolde, nämlich in beiden wie 7 : 1.

Rechnet man die gewöhnlichen Abzüge ab, so kamen von dem Bergamte Böckstein im Jahre 1829 in die Einlösung

78 Mark Gold
und 332 » Silber,

welche im Mühlgolde und im göldigen Silber enthalten waren,

Auſser den im Rathhausberge aufsetzenden Gängen sind im Thale Gastein noch viele Puncte, wo der hier durchgehends die Masse der Centralkette bildende uranfängliche Gneiſs von Gängen durchsetzt wird, die ganz dieselbe Beschaffenheit in geognostischer Beziehung zeigen, wie die des Rathhausberges. Ihre Erzführung ist dieselbe. Besonders bemerkbare Puncte sind in dieser Beziehung: das Kötschachthal in der Gegend des Böcksteinkogls, das Radeck, der Höllkahrgraben, der Kniebeiſs im Anlaufthale, die Reicheben, der Bockhardt und die Schlapperebene im Naſsfeld, die Siglitz und die sogenannten Gugln ebendaselbst, die Erzwiese im Angerthale u. m. dgl. An allen diesen Puncten setzen im Gneiſsgebirge Gneiſs- und Quarzgänge auf, die Gold und Silber unter denselben Verhältnissen führen, deren bei den Gängen des Rathhausberges im Allgemeinen gedacht wurde, deren specielle Auseinandersetzung jedoch den Gegenstand einer eigenen Abhandlung bilden wird, welche ich auszuarbeiten gedenke, sobald es meine Berufsgeschäfte erlauben.

Der Abbau dieser vielen Gänge ist seit undenkli-

cher Zeit der Gegenstand des Haupterwerbes der Thalbewohner. Für die Zeit des Beginnes des hiesigen Bergbaues haben wir keine geschichtliche Angabe, und die Ereignisse seiner Entstehung leben nur mehr in den Sagen des Gasteiners.

Nur so viel ist geschichtlich bekannt, daſs der Bergbau, dieser so wichtige Zweig der National-Cultur, auch über dieses Thal Segen verbreitete, und den Bewohnern zur Quelle des Wohlstandes wurde. 1200 Hände hatten zur Zeit des gröſsten Betriebes die Fäustel geschwungen, in allen Thälern, auf allen Höhen, an Orten, wo jetzt ungeheure Gletschermassen die Stelle menschlicher Wohnsitze eingenommen haben, herrschte das froheste, das regste Leben. Betrachten wir die Gänge des Rathhausberges, die durch den bisherigen Abbau doch schon so sehr in Bezug ihrer Veredlung in Anspruch genommen worden sind, vorurtheilsfrei und mit Sachkenntniſs in Rücksicht der noch bestehenden Mittel, in Rücksicht des noch unverritzten südwestl. Feldes der tiefern Stollen, in Rücksicht der noch unaufgeschlossenen Teufe unter der Sohle des Hieronymus-Erbstollens, wo der Gang *edel* und in einer Mächtigkeit von mehr als *einer* Lachter ansteht: so glaube ich, daſs der hiesige Bergbau in finanzieller Beziehung einst noch bessere Resultate abwerfen könnte, wenn der Betrieb in einem angemessen groſsen Maſsstabe fortgesetzt, und mehr Hoffnungsbau betrieben würde, indem mit einer besonnenen Vermehrung der Ortsbaue auch die Wahrscheinlichkeit zur Erreichung neuer Mittel wachsen würde; ja ich glaube in Bezug der Fortexistenz unsers Grubenbaues mich überzeugt, daſs wir in quantitativer Beziehung noch mehr edle Metalle aus den Gängen des Rathhausberges zu erwarten hätten, als das ganze, seit

Beginn des dortigen Grubenbaues erzeugte Quantum betragen dürfte.

II. Das Thal Rauris.

Dieses dem Gasteiner Thale am nördlichen Abhange der Centralkette gegen West nächstfolgende Seitenthal hat mit diesem eine gleiche Richtung seiner Längenerstreckung. Seinen Hintergrund bilden ebenfalls ungeheure Gebirge von uranfänglichem Gneiſs der Centralkette, der eben so wie im benachbarten Gasteiner Thale von Gängen häufig durchsetzt wird. Mehr oder weniger erzführend, seltner ganz taub, zeigen sie in geognostischer Beziehung dieselben Verhältnisse, wie die Gasteiner Gänge.

Die interessantesten dieser Lagerstätte, besonders in Bezug ihrer Erzführung, sind die des sogenannten hohen Goldberges, auf welchem noch gegenwärtig ein bedeutender Grubenbau auf edle Metalle umgeht.

Die Gänge, die ihn durchsetzen, streichen aus Nordost in Südwest, und verflächen, einen, der gegen Nordwest fällt, ausgenommen, sämmtlich gegen Südost. Sie theilen sich in erzführende und in taube; letztere, sogenannte Lettenklüfte, oder wie sie auch in Rauris ihrer Streichungsstunde nach genannt werden: Neunerklüfte, einer jüngern Bildungsperiode zugehörend, durchsetzen die erstern unter rechten Winkeln, ohne sie im Scharrungspuncte, wenige Fälle ausgenommen, aus ihrer Richtung zu verwerfen. Ihre Mächtigkeit dürfte im Durchschnitte 3 bis 5 Fuſs betragen. Die Ausfüllungsmasse der Gänge bildet meistens Quarz, unter denselben Verhältnissen, nur an edlen Metallen ungleich reicher, als in Gastein. Die Erzführung der Gänge besteht, wie in Gastein, im Vorkommen von

gediegenem Golde,

Grauantimon, gold- und silberhältig,
Antimonsilber,
Bleiglanz mit göldigem Silber,
Kupferkies,
Eisenkies,
Arsenikkies,
göldiges Silber und in sehr geringem Verhältnisse, mechanisch beigemengt, gediegenes Gold haltend.

Die Verhältnisse, unter denen die Erze vorkommen, die Art und Weise ihrer Zugutebringung, die der Aufbereitung der Pochgänge, sind analog denen im Gasteiner Thale.

Wenn wir dem bisher Gesagten zu Folge die Natur der Felsart des hohen Goldberges, seine Gänge, in Bezug ihres Streichens, Verflächens, ihrer Ausfüllung und ihrer Erzführung, wenn wir das Aufsetzen der tauben Klüfte, erfüllt mit den Trümmern des umliegenden Gebirgs- und Ganggesteins, und ihr Verhalten zu den erzführenden Gängen, in Betrachtung ziehen; so ergibt sich daraus die Folgerung, daſs die Gasteiner und Rauriser Gänge einer Formation, einer Bildungsperiode angehören, die zwei Zeitfolgen umfaſst, in denen erst erzführende, dann taube Gänge entstanden sind.

Jedoch, ungeachtet der Formationsverwandtschaft dieser Gänge, zeigen sich bei näherer Betrachtung ihrer Erzführung Erscheinungen, welche darauf schlieſsen lassen, daſs jene Umstände, die die Verbindungsverhältnisse der edlen Metalle in ihnen bestimmten, durch locale Einwirkungen bedeutend modificirt worden sind, wie aus dem Folgenden erhellt.

Die äuſser den Erzen aus der Gangmasse eroberten Pochgänge halten im Durchschnitte auf 1000 Kübel, an gediegenem Golde 3 Mark, an göldigem Silber 8 bis 10 Mark, an Schlichen 10000 Pfund. Das göldige Silber

der Erze und Schliche hält auf die Mark an Gold 1 L. 1 Q., an Silber 14 L. 3 Q.

Das Verhältniſs des Silbers zum Golde ist daher nahe = 12 : 1, während es im Gasteiner göldigen Silber = 7 : 1 ist.

Das gediegene Gold der Pochgänge, übrigens unter denselben Verhältnissen wie in Gastein vorkommend, verräth schon durch seine messinggelbe Farbe einen gröſsern Silbergehalt. Dieser beträgt in dem durch die Amalgamation dargestellten Mühlgolde auf die Mark 5 Loth. Das Verbindungsverhältniſs des Goldes zum Silber ist daher = 2,2 : 1, während es im Gasteiner Mühlgolde = 7 : 1 ist.

Sollte vielleicht irgend eine Verschiedenheit in der Reihenfolge der Gebirgsschichten, durch eine sich daraus ableitende electro-chemische Wirkung, diese Modification der Verbindungsverhältnisse des Goldes und Silbers in den sich sonst so nahe stehenden Gängen bewirkt haben? Bei dieser Gelegenheit mache ich noch auf eine Erscheinung aufmerksam, die im Allgemeinen vermuthet, im Besonderen hie und da bereits nachgewiesen, auch hier ihre Bestätigung findet, nämlich: *Boussingault* fand (*Schweigger's* Journal für Chemie und Physik, Jahrgang 1827, Bd. 2, Heft 3), daſs in der Natur Silber und Gold sowohl im göldigen Silber als im silberhältigen gediegenen Golde stets in bestimmten chemischen Verhältnissen vorkommen. Er nennt diese Verbindungen Auride, und stellt folgende Reihe der Verbindungsverhältnisse des Silbers mit dem Golde auf:
1 M. G. Silber mit 2, 3, 5, 6, 8 und 12 (?) M. G. Gold, und schlieſst mit der Vermuthung, daſs die Reihe auch nachstehende Gestalt haben dürfte:

1 M. G. Gold mit 2, 3, 5, ... M. G. Silber.

Diese seine Vermuthung sieht man im göldigen Sil-

ber von Rauris und Gastein bestätiget, indem das Verbindungsverhältniſs Statt findet:

1 M. G. Gold mit 7, 12 M. G. Silber;

im silberhältigen gediegenen Golde von Rauris und Gastein hat die Reihe der Verbindungsverhältnisse nachstehende Gestalt:

1 M. G. Silber mit 2,2 und 7 M. G. Gold.

Der höchste der noch in Betrieb stehenden Grubenbaue liegt 7600 Pariser Fuſs über der Meeresfläche, umgeben von ungeheuern Gletschermassen. Der Grubenbau in Bezug seiner Ausdehnung ist gegen dem in Gastein ein Miniaturgemälde, und eben wegen seiner geringern Ausdehnung und dem groſsen Adel der Gänge hätte man hier bei zweckmäſsiger Aufschlieſsung der Gänge groſse Hoffnung zur Ausrichtung neuer edler Mittel.

Unter denselben Verhältnissen kommt das Gold auch am Hochhorn vor, welches Gebirge zu einer Meereshöhe von 10300 Pariser Fuſs emporsteigt.

III. Pinzgau.

Für das Vorkommen des Goldes, sowohl im gediegenen Zustande, als auch chemisch verbunden mit Silber, sprechen nicht nur die in einigen Seitenthälern der Centralkette betriebenen Grubenbaue dieses Thals, sondern auch die Bäche, welche am nördlichen Abhange des Granit- und Gneiſsgebirges hervortreten, und die im Sande, den sie mit sich führen, fast durchgehends Goldtheilchen enthalten.

So weit man die Bäche, in Bezug ihrer Goldführung, ihrem Ursprunge zu untersucht, so weit man das Gebirge durch Bergbau aufgeschlossen hat, fand man die nachstehende Thatsache auch hier bestätiget, nämlich: daſs das Gold im gediegenen Zustande Eigenthum

der Gänge des Granit- und Gneiſsgebirges ist, und daſs sich dasselbe bisher noch nicht in den Gängen und Lagern des Granit-Glimmerschiefergebirges vorgefunden hat. Verbunden jedoch mit Silber zu göldigem Silber erscheint dasselbe nicht nur auf Gängen im Granit- und Gneiſsgebirge, sondern auch auf den Lagerstätten des Granit-Glimmerschiefers, niemals jedoch hat man dasselbe auf den Lagerstätten der Pinzgau gegen Nord begrenzenden Voralpenkette entdeckt.

Unter gleichen Verhältnissen findet man das Gold gediegen vorzüglich in den Seitenthälern Fusch, Kaprun, Hollersbach, Krimml. Verbunden mit Silber, als göldiges Silber kommt es auſser in den erwähnten Seitenthälern noch im Felberthale und im Heubachthale vorzüglich vor.

Besondern Aufschluſs über das Vorkommen des Goldes geben die einst in den Seitenthälern Fusch, Felberthal und Heubach in Betrieb gestandenen Grubenbaue, daher ich auch dieselben in dieser Beziehung näher betrachten will.

a) Das Seitenthal Fusch.

Dieses Thal durchsetzt den nördlichen Abhang der Centralkette aus Süd in Nord, parallel dem Rauriser Thale, dessen westlicher Nachbar es ist.

In seinem Hintergrunde erheben sich die höchsten Gneiſsgebirge der ganzen Centralkette, die bis zu einer Meereshöhe von 11000 bis 12000 Pariser Fuſs emporsteigen.

Die Gänge des Gneiſsgebirges führen Gold, sowohl gediegen als mit Silber verbunden, und zwar besonders im Hierzbache, auf der Schiedalpe, am Brennkogl, am Faulkogl, u. s. w.

Der in dieser Beziehung interessanteste Punct, der

Hierzbach, bildet ein secundäres Seitenthal der Centralkette, ein Seitenthal des Fuscherthales. Die hier anstehende Gesteinsart wird von Einigen als Quarzschiefer angesprochen. Die Eigenthümlichkeit der Textur jedoch, die zu dieser Benennung Anlafs gibt, beeinträchtigt nicht deren geognostische Stellung als uranfänglicher Gneifs, als ihrer Parallel-Formation.

Die Gänge, die diese Felsart durchsetzen, streichen aus Nord in Süd, und verflächen gegen Ost. Ihre Ausfüllungsmasse bildet Quarz, manchmal von Kalkspath begleitet. Sie haben im Durchschnitte geringe Mächtigkeit. Der Gangquarz ist von weifser Farbe, und wenn er richtig aus der Ausfüllungsmasse eines Ganges ist, immer goldhältig. Die Erzführung der Gänge beschränkt sich auf das Vorkommen von

gediegenem Golde,
Kupferkies,
Arsenikkies,
Eisenkies,
Bleiglanz,

sämmtlich göldiges Silber haltend.

Im äufsern Ansehen ist das Gold der Hierzbacher Gänge dem der Gasteiner ähnlich. Wenn dasselbe sichtbar im Gangquarze hervortritt, so zeigt sich seine Gestalt in Blättchen und Körnern, ohne dafs man eine geregelte Form erkennen kann. Manchmal, doch selten, führt auch der Kalkspath der Gänge gediegen Gold, und man hat oft in dieser Beziehung schöne Handstücke gefunden.

Die hier gewonnenen Pochgänge gaben, nach *damaliger* Scheidmethode, auf 1000 Kübel 6 bis 8 Loth gediegenes Gold. Das göldige Silber in den Erzen und Schlichen gab auf die Mark an Gold 6 bis 7 Loth, so

dafs das Verbindungsverhältnifs des Goldes mit dem Silber im göldigen Silber im Durchschnitte = 1 : 1,46 ist.

Die Gänge sind hier weder ins Feld, noch in die Teufe gehörig aufgeschlossen, und der bestandene Grubenbau wurde, aus mir unbekannten Ursachen, im jugendlichen Alter seiner Entstehung aufgelassen. Man kennt eigentlich im Hierzbache die dem Bergmanne sich darbietende Hoffnung gar nicht, und wenn auch der Gehalt der Pochgänge an gediegenem Golde, nach früher bestandener Scheidungsmethode, an und für sich gering ausfiel, so verdient doch der hohe Gehalt des göldigen Silbers der Erze und Schliche an Gold volle Berücksichtigung, und berechtigt zu schönen bergmännischen Hoffnungen.

b) Das Felberthal.

Über den Gehalt der Gänge des Granit- und Gneifsgebirges dieses Thals an gediegenem Golde hat man durch Bergbau weiter keinen Aufschlufs, und das Vorhandenseyn dieses Metalls läfst sich nur aus den Spuren desselben vermuthen, die der Sand des dieses Seitenthal durchströmenden Bergstroms hie und da bemerken läfst.

Über das Vorkommen des Goldes, verbunden mit Silber zu göldigem Silber, hat man jedoch durch einen in der Nähe des Tauernhauses einst betriebenen Schürfbau nähern Aufschlufs. Die hier anstehende Felsart ist Glimmerschiefer, dessen nahe Verwandtschaft zum Gneifs sich hie und da durch die Aufnahme von Feldspath in seine Gemengtheile und durch den dadurch begründeten Übergang in letztere Felsart beurkundet. Man bemerkt an mehrern Orten eine deutliche Wechsellagerung mit jüngerm Granite, so dafs man eigentlich das ganze Gebirge als Granit-Glimmerschiefer anzusprechen hat.

Die Schichten dieses Felsgebildes streichen aus Ost in West, und verflächen unter einem Winkel von 45° gegen Nord. Man bemerkt an mehreren Orten, daſs Gänge rechtwinkelig diese Schichten durchsetzen, und sich meist gegen Ost verflächen.

Durch bergmännische Nachforschungen hat man zwei, hinter einander liegende, den Gebirgsschichten parallel streichende und verflächende Gänge (Lager?) erschürft.

Die Ausfüllungsmasse bildet weiſser Quarz, der Schwarzgültigerz, meist im aufgelösten Zustande, Eisenkies und Kupferkies führt.

Die Mächtigkeit dieser Gänge ist ungemein abwechselnd, indem sie sich bald bedeutend verschmälern, bald wieder aufthun.

Man stellte den die Erze führenden Quarz dieser Gänge als Erze und als Pochgänge dar. Die reichste Gattung der erstern hielt im Centner 20 bis 24 Loth göldiges Silber, die ärmere Gattung hielt 6 bis 8 Loth. Der auf der Handfachse rein ausgezogene Schlich der Pochgänge hielt im Centner 24 bis 26 Loth an göldigem Silber.

1 Mark des göldigen Silbers der Erze und Schliche hielt im Durchschnitte an Gold 2 bis 3 Quintl, so daſs das Verbindungsverhältniſs des Goldes mit dem Silber im göldigen Silber = 1 : 24,6 ist.

Man stellte diesen Bau wegen der miſslichen Localverhältnisse und der, in quantitativer Beziehung, geringen Eroberung wieder ein.

c) Das Heubachthal.

Dieses Seitenthal am nördlichen Abhange der Centralkette zeigt sowohl in Bezug der Reihenfolge seiner Felsgebilde als in Bezug des Vorkommens von gediege-

nem Golde und göldigem Silber ganz dieselben Verhältnisse wie das Felberthal, von dem es nur durch das Hollersbachthal getrennt ist.

Im Granit - Glimmerschiefergebirge dieses Thales ging einst am westlichen Abhange desselben, am sogenannten Gemseck, ein gewerkschäftlicher Bergbau um.

Die Schichten des Granit-Glimmerschiefergebirges streichen hier aus Nordost in Südwest, und verflächen gegen Südost unter einem Winkel von 70° bis 80°.

Der Gegenstand der bergmännischen Arbeiten war der Abbau einer den Gesteinsschichten parallel streichenden und parallel fallenden Lagerstätte, die ganz den Charakter eines Lagers an sich trägt.

Die Masse dieses Lagers bilden Glimmerschiefer und weifser Quarz. Seine Mächtigkeit wechselt von 0′,5 bis 1′,5, und es ist nicht nur Verschiebungen, sondern auch Zertrümmerungen häufig unterworfen.

Die in der Lagermasse einbrechenden Erze sind:

Bleiglanz,
Kupferkies,
Eisenkies,
Kupferfahlerz,

sämmtlich göldiges Silber haltend.

Man gewann hier Erze und Pochgänge. Von erstern hielt im Centner die reichste Sorte, das Kupferfahlerz, 7 bis 8 Loth göldiges Silber, und 7 bis 8 Pf. Kupfer; die folgende, reiner Bleiglanz, hielt 6 bis 7 Loth göldiges Silber; die dritte, die ärmste, Bleiglanz mit Kupfer- und Eisenkies, hielt 4 bis 5 Loth göldiges Silber, und 4 bis 5 Pf. Kupfer.

Die Mark des göldigen Silbers aus dem Bleiglanze und Fahlerze hielt 2 bis 3 Denär, aus dem Kupferkiese aber 1 1/2 bis 2 Quintl an Gold. Das Verbindungsverhältnifs des Goldes mit dem Silber im göldigen Silber des

Bleiglanzes und Fahlerzes ist daher im Durchschnitte = 1 : 101,4, und im göldigen Silber des Kupferkieses = 1 : 35,6.

Dieser Grubenbau wurde wegen localen Hindernissen, und wahrscheinlich auch wegen quantitativ geringer Eroberung wieder eingestellt.

IV. Lungau.

In den Gängen des dortigen Granit-, Gneifs- und Granit-Glimmerschiefergebirges findet man am südl. Abhange der Centralkette das Gold in erstern nicht nur im gediegenen Zustande, sondern auch, so wie im letztern, mit Silber zu göldigem Silber verbunden.

Die bedeutendsten Fundorte sind in dieser Beziehung das Gangthal, die Brammleite, die Schelchwand, der Kaltenbach, das Birkeck und das kleine Thal Rothgülden.

Wo das gediegene Gold und das göldige Silber vorkommt, geschieht diefs im Ganzen unter gleichen Verhältnissen, und ich werde daher in dieser Beziehung nur jene Puncte berühren, wo uns bergmännische Betriebsamkeit einen Blick in die Lagerstätte der Natur gewährt.

a) Das Goldbergwerk Schellgaden.

In der Nähe des Ortes Schellgaden im Muhrwinkel, einem Seitenthale der Centralkette, betrieb man einst an zwei Orten bedeutenden Bergbau, nämlich am Gangthale und am sogenannten Birkeck.

Die hier anstehende Felsart ist der uranfängliche Gneifs unserer Alpenkette. Er ist ausgezeichnet geschichtet, und seine Schichten streichen aus Nord nach Süd mit einem östlichen Verflächen.

In diesem Felsgebilde setzen parallel den Gesteins-

schichten Gänge auf, welche Quarz zur Ausfüllung, und im Durchschnitte eine Mächtigkeit von 1 bis 2 Fuſs haben. Sie setzen häufig Trümmer ab, und sind so wie diese erzführend. Die Erzführung derselben beschränkt sich auf das Vorkommen von gediegenem Golde, meist in unregelmäſsig gestalteten Körnern, manchmal sichtbar, meist in mikroskopischer Kleinheit, dann in

Kupferkies,
Eisenkies,
Arsenikkies,
Bleiglanz,

sämmtlich göldiges Silber haltend.

Man gewinnt diese Erze theils als Scheiderze, theils als Pochgänge, von denen letztern 1000 Kübel ungefähr 12 bis 14 Loth gediegenes Gold halten dürften.

Über das Verbindungsverhältniſs des Goldes zum Silber im göldigen Silber der Erze und Schliche ist mir leider nichts Näheres bekannt.

Diese erzführenden Gänge werden von tauben Gängen, die aus Ost nach West streichen, und in Bezug ihrer Ausfüllung den Gasteiner und Rauriser Lettenklüften gleichen, durchsetzt, und im Scharrungspuncte verschoben.

Dieser Bergbau wurde, wahrscheinlich aus finanziellen Rücksichten, wieder eingestellt.

b) Das Arsenikbergwerk Rothgülden.

In einer Seitenschlucht des Muhrwinkels, Namens Rothgülden, geht ein gewerkschaftlicher Bergbau auf Arsenik um. Die anstehende Felsart ist das Granit-Glimmerschiefergebirge mit untergeordneten Lagern von körnigem, weiſsen Kalk. In einem dieser Lager setzt ein zweites untergeordnetes Lager von Arsenikkies auf. Dasselbe streicht aus Ost in West, und verflächt unter 45°

gegen Süd. Die Mächtigkeit wächst im Verhältnifs der Teufe, und nimmt von einigen Fufs bis zu 15 Lachter zu. Das Lagergestein bilden Kalkspath und Braunspath. Die darin vorkommenden Erze sind Arsenikkies und Eisenkies.

Ich habe die dortigen Grubenbaue zu befahren nie Gelegenheit gehabt, auch nie die Gesteinsarten dieser Lagerstätte selbst untersucht. Aufmerksam glaube ich jedoch darauf machen zu müssen, dafs untersucht würde, ob nicht der körnige Kalk des Lagers Bittererdehältig sey, und ob nicht diese Lagerstätte vielmehr den Charakter eines Ganges an sich trage.

Auf einem Nebentrumme dieses Kieslagers soll sich jedoch die interessante Erscheinung ergeben haben, dafs der Arsenikkies im Centner 1 bis 2 Quintl Silber hielt, von welchem Silber in der Mark desselben durchschnittlich 2 L. 2 Q. Gold enthalten waren.

Das Verbindungsverhältnifs des Goldes zum Silber im göldigen Silber dieses Arsenikkieses ist daher = 1 : 5,4.

* * *

Aus dem bisher über das Vorkommen des Goldes im Erzgebirge des Herzogthums Salzburg, nach seiner gegenwärtigen Begrenzung, Gesagten, ergeben sich nachstehende Resultate:

1. Die, die südliche Grenze Salzburgs bildende, Alpenkette theilt sich, sowohl in Bezug der Reihenfolge der sie bildenden Felsarten, als in Bezug ihrer Erzführung in zwei parallele, aus Ost nach West streichende Züge, in die Centralkette und in die Voralpen.

2. In Bezug der Erzführung zeichnet sich die Centralkette vorzüglich durch das Vorkommen von Gold, Silber, Kupfer und Arsenik aus, während die Lagerstätte der Voralpen besonders Eisen, Blei und goldfreies Silber enthalten.

3. Das Gold ist also im *salzburgischen* Erzgebirge ausschliessliches Eigenthum des Urgebirges der Centralkette.

4. Dieses Metall wird entweder gediegen, oder mit Silber zu göldigem Silber verbunden, gefunden.

5. Im gediegenen Zustande ist das Gold nur den Gängen des Granit- und Gneissgebirges eigen.

6. Mit Silber verbunden erscheint es jedoch nicht nur auf diesen Gängen, sondern auch auf denen des Granit-Glimmerschiefergebirges, und auf, dem letztern untergeoedneten, Lagern. Niemals wird aber dasselbe auf den Lagerstätten der Voralpen gefunden.

7. Alle, Gold und göldiges Silber führenden, Lagerstätte behaupten im Durchschnitte ein Streichen aus dem nordöstlichen in den südwestlichen, und ein Verflächen in den südöstlichen Quadranten. Die Richtung der geraden Linie, welche den westlichsten und östlichsten Punct der Centralkette verbindet, wo man Gold, theils gediegen, theils mit Silber verbunden, findet, hat die Richtung aus Südost in Nordwest, folglich jene Richtung, in welcher die Gänge verflächen. Eine Thatsache, die zu mancherlei Folgerungen Anlass geben dürfte.

8. Die erzführenden Gänge werden häufig von jüngern Klüften (Lettenklüften) durchsetzt, und meistens in den Scharrungspuncten verschoben.

9. Die Ausfüllung der, gediegenes Gold führenden, Gänge des Granit- und Gneissgebirges bildet vorzüglich weisser Querz und Gneiss, seltner Kalkspath.

10. Der Quarz der Gänge ist es vorzüglich, der das gediegene Gold, meist in mikroskopischer Kleinheit, niemals in geregelten Krystallformen, enthält.

11. Ausser dem Quarze bildet es im geringen Verhältnisse auch einen mechanischen Gemengtheil der Kiese,

und wird als Seltenheit manchmal auch im Gneifse und Kalkspath der Gänge eingesprengt gefunden.

12. Das gediegene Gold zeigt in Bezug seines Vorkommens, besonders wenn es sichtbar hervortritt, eine besondere Verwandtschaft zu den antimonhältigen Fossilien, während in Bezug des Bleiglanzes das Entgegengesetzte zu bemerken ist.

13. Das gediegene Gold der Gänge enthält keine andere Beimengung, als Silber, und, wie es scheint, in bestimmten Verhältnissen. Für das gediegene Gold von Rauris und Gastein sind die Mischungsverhältnisse:

1 M. G. Silber mit 2,2 und 7 M. G. Gold.

14. Die bisher bekannten Fundorte des gediegenen Goldes, vorausgesetzt, wo dasselbe im festen anstehenden Ganggesteine entdeckt wurde, befinden sich alle in bedeutender Höhe über der Meeresfläche, und dürften sämmtlich zwischen 9000 bis 10000 Pariser Fuſs liegen.

15. Im Granit- und Gneifsgebirge kommt das göldige Silber meist nur auf solchen Gängen vor, die auch gediegenes Gold führen.

16. Im Granit-Glimmerschiefergebirge ist es das Eigenthum eigener Quarzgänge, die meistens, lagerartig, den Gesteinsschichten parallel aufsetzen, oder es bricht auf wirklichen Quarzlagern ein.

17. In der einzigen Schlucht Rothgülden im Muhrwinkel findet man dasselbe als Bestandtheil des Arsenikkieses auf einem Kalkspathlager im körnigen Kalke, der dem Granit-Glimmerschiefergebirge untergeordnet ist.

18. Das göldige Silber bildet meist einen Bestandtheil des Bleiglanzes, Kupferkieses, Eisenkieses, Arsenikkieses und des Schwefelantimons. Seltener erscheint es für sich selbst im geschwefelten Zustande als Schwarzgültigerz, welches meist zur Silberschwärze aufgelöst erscheint, oder mit Antimon zu Antimonsilber verbunden.

19. Die Verbindung des Goldes mit dem Silber im göldigen Silber scheint in bestimmten Verhältnissen zu bestehen. Es diene nachstehende Übersicht, dieses weiters zu untersuchen.

Im göldigen Silber ist	
1 M. G. Gold	verbunden mit 12 M. G. Silber.
Im Hierzbache	1,5
In Rothgülden	5,4
» Gastein	7
» Rauris	12
Im Felberthal	24,6
Am Gemseck (Kupferkies)	35,6
» » (Bleiglanz und Fahlerz)	101,4

20. Die schnell vorüber gegangene Erscheinung des Vorkommens des göldigen Silbers auf einem Seitentrumm des Arsenikkieslagers von Rothgülden im Granit-Glimmerschiefergebirge, mit Recht abgerechnet, ersieht man aus vorstehender Tabelle, daſs das göldige Silber aus den Gängen des Granit- und Gneiſsgebirges an Gold ungleich reicher, als das aus den Lagerstätten des Granit-Glimmerschiefergebirges ist.

Zur gröſseren Verdeutlichung des Gesagten dient die Karte über den Zug der Centralalpenkette im Herzogthum Salzburg, welche ich mit besonderer Beziehung auf die, den nördlichen Abhang derselben mit Ausnahme Lungau's, durchsetzenden Seitenthäler und auf jene Puncte, wo bisher das Vorkommen edler Metalle nachgewiesen worden ist, dargestellt habe. Denselben Zweck hat der ideale Durchschnitt derselben Kette, den ich in

Bezug der Lagerungsfolge der Felsarten ihres nördlichen und südlichen Abhanges im Meridian des Grofsglockners dargestellt habe. (Siehe Tafel 3.) Dabei mufs ich bemerken, dafs mir der südliche Abhang der Centralkette nicht aus eigener Erfahrung bekannt ist, und ich daher die Lagerungsfolge der Felsgebilde nur im Allgemeinen angedeutet habe, wie dieses ohnehin aus dem Durchschnitte klar hervorgeht. Die dem Durchschnitte eingeschriebenen Zahlen haben folgende Bedeutung: 1) Centralgranit; 2) Gneifs; 3) Granit-Glimmerschiefer; 4) Glimmerschiefer und körniger Kalk; 5) Thonschiefer; 6) dichter Kalk (*mont. limest.*); 7) Alpenkalk; 8) Lialkalk; 9) Liassandstein; 10) Molasse und Nagelflue; 11) Alluvial- und Diluvialland; 12) Salzthon und Steinsalz; 13) linsenförmiger Thoneisenstein; 14) Eisensteine des *mount. limest.*

II.

Ein Beitrag zur Theorie der Refractoren;

vom

Prof. *Andreas Spunar* zu Olmütz.

Herr Director *Littrow* sagt in seinem Aufsatze über die terrestrischen Oculare (Zeitschrift IV. 204), *Fraunhofer* baue die terrestrischen Oculare so, dafs die beiden Bilder zwischen die Linsen I. und II., und dann IV. und V. fallen, gibt aber nicht die Gründe an, die *Fraunhofer* bewogen haben mögen, von dem bis dahin üblichen Verfahren abzuweichen. Er nimmt ferner (S. 202, 204) die in dem analytischen Ausdrucke für das Gesichtsfeld vorkommenden Gröfsen nicht so an, dafs dieses den gröfstmöglichen Werth erhalte, ohne die Ursache die-

ses Verfahrens anzugeben. Dieses bewog mich nun zur Untersuchung der beiden Fragen, ob sich nämlich erstens nicht terrestrische Oculare bauen lassen, die das gröſstmögliche Gesichtsfeld und einen farbenlosen Rand haben, und zweitens, was *Fraunhofer* bewogen haben mag, das bis dahin übliche Verfahren zu verlassen, und die Bilder zwisehen die Gläser I. und II., und dann IV. und V. zu stellen? Ich lege die Resultate dieser Untersuchungen hier vor, falls sie etwas Neues und Nützliches enthalten sollten. — Zum Verständnisse derselben seyen (Figur 18) A, B, C, D und E fünf Linsen, und AE ihre gemeinschaftliche Axe. $AbcdeF$ sey der Gang des das Gesichtsfeld φ begrenzenden Strahls, und FG, HI, KL, MN und OP seyen die Bilder eines von A sehr weit entfernten Gegenstandes. Die Brennweiten der Linsen seyen p, q, r, s und t, und die Halbmesser derselben wegen des Gesichtsfeldes, nämlich Bb, Cc, Dd und $Ee = \pi q$, $\pi' r$, $\pi'' s$ und $\pi''' t$, so dürfen bekanntlich die Gröſsen π, π', π'' und π''' die Zahl $\frac{1}{4}$ nicht übersteigen. Ich nenne ferner die vorderen Vereinigungsweiten a, b, c, d und e, und die hinteren α, β, γ, δ und ε, setze das Objectiv A achromatisch vorsus, indem ich auf die vortrefflichen Aufsätze des Hrn. Directors *Littrow* (Zeitschrift III. 129, IV. 257) verweise, und beschränke meine Untersuchungen nur auf Refractoren, die aus Sammlungslinsen bestehen. Die analytischen Ausdrücke setze ich aus *Euler's* und *Klügel's* Schriften als bekannt voraus, und will nun die aufgestellten Fragen in folgenden Aufgaben zu beantworten suchen:

Aufgabe I. Ein Fernrohr aus zwei Linsen zu construiren.

Auflösung. Aus zwei Linsen wird das Fernrohr immer sehr unvollkommen seyn, weil sich erstens der farbige Rand nicht aufheben läſst, wie aus der Bedingungs-

gleichung $\frac{dn}{n-1}\pi = 0$ ersichtlich ist, und weil zweitens das Gesichtsfeld $\varphi = \frac{\pi}{m+1}$ für gröfsere Vergröfserungen m sehr klein ist.

Aufgabe II. Ein Fernrohr aus drei Linsen zu construiren.

Auflösung. Für diesen Fall ist (1) $m = \frac{p\beta}{br}$, (2) $\pi q = (p+b)\varphi$, (3) $\varphi = \frac{\pi' - \pi}{m-1}$, (4) $\frac{\beta}{r}\pi + \pi' = 0$, und (5) CR (Fig.) $= \frac{\pi' r}{m\varphi}$. Setzt man $\pi' = w\pi$, so erhält man aus (3) $\varphi = \frac{w-1}{m-1}\pi$, aus (4) $\frac{\beta}{r} = -w$, aus (1) $b = -\frac{w}{m}p$, aus (2) $q = \frac{(m-w)(w-1)}{m(m-1)}$, aus $\beta = \frac{bq}{b-q}$, $\beta = \frac{w(m-w)(w-1)}{m(2mw-w^2-m)}p$, aus (4) $c = r = -\frac{\beta}{w} = \frac{(m-w)(1-w)}{m(2mw-w^2-m)}p$, und endlich aus (5) $CR = \frac{wr}{m\varphi}\pi$. π und φ müssen der Natur der Sache nach positiv seyn.

Wollte man nun durch dieses Fernrohr den Gegenstand aufrecht sehen, so müfste der Winkel R (Fig.) $= m\varphi$, also m positiv seyn, folglich müfste, wie man aus der Gleichung $\varphi = \frac{w-1}{m-1}\pi$ sieht, w positiv und gröfser als 1 seyn. Ferner müfste, wie die Gleichung $m = \frac{p\beta}{br}$ zeigt, $\frac{\beta}{b}$ positiv, also entweder β und b positiv, oder β und b negativ seyn.

Im ersten Falle müfste, wie aus $b = -\frac{w}{m}p$ ersichtlich ist, w negativ seyn.

Im zweiten Falle müfste zwar w positiv seyn, allein,

weil bei grofsen m, β beinahe $= \frac{w(w-1)}{m(2w-1)} p$ ist, so müfste wieder w zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ fallen.

Diesem zu Folge läfst sich also aus drei Convexlinsen kein vollkommenes Fernrohr construiren, das die Gegenstände in der aufrechten Stellung zeigte.

Wollte man aber den Gegenstand verkehrt sehen, so müfste m negativ seyn, folglich w, wie die Gleichung $\varphi = \frac{1-w}{m+1} \pi$ zeigt, entweder positiv und kleiner als 1, oder es müfste w negativ seyn. Ferner müfste $\frac{\beta}{b}$ negativ, also entweder β positiv und b negativ, oder β negativ und b positiv seyn.

Im ersten Falle müfste nach $b = \frac{w}{m} p$, w negativ seyn, und da bei grofsen m, β beinahe $= \frac{w(w+1)}{m(2w+1)} p$ ist, so könnte w alle Werthe annehmen, die aber die Einheit nicht übersteigen dürfen, wenn $\pi = \frac{1}{4}$ angenommen wird. Das Gesichtsfeld wird am gröfsten bei $\pi = \frac{1}{4}$ und $w = -1$.

Im zweiten Falle müfste w positiv seyn, und da bei grofsen m in diesem Falle β beinahe $= \frac{w(w-1)}{m(1-2w)} p$ ist, so müfste $w < \frac{1}{2}$ seyn.

Diese Einrichtung gibt also ein kleines Gesichtsfeld, nebst dem dafs CR negativ ist, also das Auge ganz an das letzte Ocular gebracht werden mufs, wenn das Gesichtsfeld nicht noch kleiner werden soll.

Aufgabe III. Ein Fernrohr aus vier Linsen zu construiren.

Auflösung. Für diesen Fall ist $\varphi = \frac{\pi'' - \pi' + \pi}{m+1}$, und wenn man $\pi' = w' \pi$ und $\pi'' = w'' \pi$ setzt,

$\varphi = \frac{w'' - w' + 1}{m+1} \pi$.

Will man mittelst dieses Fernrohrs den Gegenstand aufrecht sehen, so muſs m negativ angenommen werden, also wird $\varphi = \frac{-w'' + w' - 1}{m+1}\pi$. Das gröſstmögliche Gesichtsfeld ist also $= \frac{1}{m-1}\pi$. folglich viel zu klein.

Will man den Gegenstand verkehrt sehen, so muſs m positiv angenommen werden. Dadurch wird $\varphi = \frac{w'' - w' + 1}{m+1}\pi$, folglich das gröſstmögliche Gesichtsfeld $= \frac{3}{m+1}\pi$. Dieses Gesichtsfeld ist zwar gröſser als das des Fernrohrs aus drei Linsen, dafür ist aber auch der Lichtverlust gröſser, so daſs denn doch in diesem Falle das Fernrohr aus drei Linsen den Vorzug verdienen dürfte.

Aufgabe IV. Ein Fernrohr aus fünf Linsen zu construiren.

Auflösung. Für diesen Fall ist

$$(1) \quad m = \frac{p\beta\gamma\delta}{b\,c\,d\,t},$$

$$(2) \quad \pi q = (p + b)\varphi,$$

$$(3) \quad \pi' r = \left(\frac{p\beta}{b} - c\right)\varphi + o\pi,$$

$$(4) \quad \pi'' s = \left(\frac{p\beta\gamma}{bc} + d\right)\varphi + d(\pi' - \pi),$$

$$(5) \quad \varphi = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi}{m-1},$$

$$(6) \quad \frac{\beta\gamma\delta}{c\,d\,t}\pi + \frac{\gamma\delta}{d\,t}\pi' + \frac{\delta}{t}\pi'' + \pi''' = o,$$

und $(7) \quad EF = \frac{\pi''' t}{m\varphi}$.

Setzt man $\pi' = w'\pi$, $\pi' = w''\pi$ und $\pi''' = w'''\pi$, so erhält man aus (5) $\varphi = \frac{w''' - w'' + w' - 1}{m+1}\pi$.

Soll das Gesichtsfeld so groſs als möglich seyn, und

will man den Gegenstand aufrecht sehen, so mufs $w''' = 1$, $w'' = -1$, $w' = 1$ und m positiv seyn. Dadurch wird $\varphi = \frac{2}{m-1}\pi$. Ferner wird aus (6) $\frac{\beta\gamma\delta}{cdt} + \frac{\gamma\delta}{dt} - \frac{\delta}{t} + 1 = 0$, und setzt man $\frac{\gamma}{d} = P$ und $\frac{\delta}{t} = Q$, so wird man haben $\frac{\beta\gamma\delta}{cdt} + PQ - Q + 1 = 0$ oder $\frac{\beta\gamma\delta}{cdt} = -PQ + Q - 1 = S$.

Man erhält also aus (1) $b = \frac{S}{m} p$ (A), und aus (2) $q = \frac{2m + 2S}{S(m-1)} b$ (B). Ferner aus $\beta = \frac{q}{1 - \frac{q}{b}}$, $\beta = \frac{S(m-1)}{S(m-3) - 2m} q$ (C), und aus $\frac{\beta}{c} PQ = S$, $c = \frac{PQ}{S}\beta$ (D); ferner aus (3) $r = \frac{PQ(m-3) + 2m}{PQ(m-1)} c$ (E), aus $\gamma = \frac{r}{1 - \frac{r}{c}}$, $\gamma = \frac{PQ(m-1)}{2PQ - 2m} r$ (F), aus $\frac{\gamma}{d} = P$, $d = \frac{\gamma}{P}$ (G), aus (4) $s = -\frac{2m+2Q}{Q(m-1)} d$ (H), aus $\delta = \frac{s}{1 - \frac{s}{d}}$, $\delta = \frac{Q(m-1)}{Q(m+1)+2m} s$ (I), und endlich aus $\frac{\delta}{t} = Q$, $e = t = \frac{\delta}{Q}$ (K). Die Gröfsen P und Q bleiben der Willkür überlassen, S ist aber $= Q - PQ - 1$ (L).

Wir wollen nun untersuchen, wie die Gröfsen P, Q und S angenommen werden müssen, wenn die beiden Bilder (s. die Fig.) entweder in 1 und 2, oder in 1 und 3, oder in 1 und 4, oder in 2 und 3, oder in 2 und 4, oder endlich in 3 und 4 liegen. Folgende Tabelle liefert die Übersicht der Bedingungen in allen diesen verschiedenen Fällen, wie sich jene theils aus der Natur der Sache, und theils aus den in der ersten verticalen Columne bezeichneten Gleichungen ergeben.

	1, 2.	1, 3.	1, 4.
	b pos.	b pos.	b pos.
(*A*)	S pos.	S pos.	S pos.
	q pos.	q pos.	q pos.
(*B*)	—	—	—
	β pos.	$\beta \begin{cases} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{cases}$	$\beta \begin{cases} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{cases}$
(*C*)	$S > \frac{2m}{m-3}$	$S \gtrless \frac{2m}{m-3}$	$S \gtrless \frac{2m}{m-3}$
	c pos.	$c \begin{cases} \text{neg.} \\ \text{pos.} \end{cases}$	$c \begin{cases} \text{neg.} \\ \text{pos.} \end{cases}$
(*D*)	PQ pos.	PQ neg.	PQ neg.
	r pos.	r pos.	r pos.
(*E*)	—	$PQ \lessgtr \frac{2m}{m-3}$	$PQ \lessgtr \frac{2m}{m-3}$
	γ neg.	γ pos.	γ pos.
(*F*)	$PQ < m$	—	—
	d pos.	d pos.	d neg.
(*G*)	P neg. < 1 Q neg.	P pos. Q neg.	P neg. > 1 Q pos.
	s pos.	s pos.	s pos.
(*H*)	$Q < m$	$Q < m$	—
	δ neg.	δ neg.	δ pos.
(*I*)	$Q < \frac{2m}{m+1}$	$Q < \frac{2m}{m+1}$	—
	e pos.	e pos.	e pos.
(*K*)	Q neg. < 1	Q neg. < 1	Q pos.
(*L*)	$S = -Q - PQ - 1$	$S = PQ - Q - 1$	$S = Q + PQ - 1$
(*L*)	—	$P > \frac{Q+1}{Q}$	$Q > \frac{1}{1+P}$

2, 3.	2, 4.	3, 4.
b neg.	b neg.	b neg.
S neg.	S neg.	S neg.
q pos.	q pos.	q pos.
$S < m$	$S < m$	$S < m$
β pos.	β pos.	β pos.
—	—	—
c pos.	c pos.	c neg.
PQ neg.	PQ neg.	PQ pos.
r pos.	r pos.	
$PQ > \frac{2m}{m-3}$	$PQ > \frac{2m}{m-3}$	
γ pos.	γ pos.	
—	—	
d pos.	d neg.	
P pos. Q neg.	P neg. > 1 Q pos.	
s pos.	s pos.	
$Q < m$	—	
δ neg.	δ pos.	
$Q < \frac{2m}{m+1}$	—	
e pos.	e pos.	
Q neg. < 1	Q pos.	
$S = PQ - Q - 1$	$S = Q + PQ - 1$	
$PQ - Q < 1$	$Q + PQ < 1$	

Betrachtet man diese Tabelle, so findet man, daſs sich die Bedingungen nur in den einzigen zwei Fällen nicht aufheben, nämlich wenn die beiden Bilder entweder in 1 und 3, oder in 1 und 4 liegen. Es bleiben also nur diese zwei Fälle übrig, die einer weiteren Betrachtung noch bedürfen.

Was den ersten Fall anbelangt, so sieht man, daſs man in demselben entweder β positiv und c negativ, oder β negativ und c positiv annehmen kann.

Nimmt man β positiv und c negativ an, so muſs bei groſsen m, $PQ - Q - 1 > 2$ oder $P > \frac{Q+3}{Q}$ (I), $PQ < 2$ oder $P < \frac{2}{Q}$ (II), $P > \frac{Q+1}{Q}$ (III) und $Q < 1$ (IV) angenommen werden, folglich müſste $2 > 3 + Q$ seyn, was absurd ist: β kann also nicht positiv seyn.

Nimmt man β negativ und c positiv an, so muſs man bei groſsen m annehmen $PQ - Q - 1 < 2$ oder $P < \frac{Q+3}{Q}$ (I), $PQ > 2$ oder $P > \frac{2}{Q}$ (II), $P > \frac{Q+1}{Q}$ (III) und $Q < 1$ (IV), welche Bedingungen wohl neben einander bestehen können.

Was den zweiten Fall anbelangt, so kann auch in diesem entweder β positiv und c negativ, oder β negativ und c positiv seyn.

Soll β positiv und c negativ seyn, so muſs seyn $Q + PQ - 1 > 2$ oder $Q > \frac{3}{P+1} = \frac{3P}{P(P+1)}$ (I), ferner $PQ < 2$ oder $Q < \frac{2}{P} = \frac{2P+2}{P(P+1)}$ (II), $Q > \frac{1}{1+P} = \frac{P}{P(P+1)}$ (III) und $P > 1$ (IV), also muſs $2P + 2 > 3P$ oder $P < 2$ seyn; d. h. P muſs in diesem Falle zwischen den Grenzen 1 und 2 enthalten seyn.

Soll β neg. und c pos. seyn, so muſs $Q + PQ - 1 < 2$

oder $Q < \frac{3}{P+1} = \frac{3P}{P(P+1)}$ (I), ferner $PQ > 2$ oder $Q > \frac{2}{P} = \frac{2P+2}{P(P+1)}$ (II), $Q > \frac{1}{1+P} = \frac{P}{P(P+1)}$ (III) und $P > 1$ (IV) seyn, folglich muſs $3P > 2P + 2$ oder $P > 2$ seyn.

Will man die obigen Gleichungen zur Berechnung des Fernrohres anwenden, so muſs man ihnen zuvor noch eine etwas bequemere Form geben. Zu diesem Behufe seyen die Distanzen der einzelnen Linsen Δ, Δ', Δ'' und Δ''', so wird man ohne Mühe erhalten $\Delta = \frac{m+S}{m} p$, $q = \frac{2}{m-1} \Delta$, $\Delta' = \frac{2(Q-1)}{S(m-3)-2m} \Delta$, $r = \frac{PQ(m-3)+2m}{S(m-3)-2m} q$, $\Delta'' = \frac{Q(P+1)(m-1)}{2PQ-2m} r$, $s = -\frac{m+Q}{PQ-m} r$, $\Delta''' = \frac{(Q+1)(m-1)}{Q(m+1)+2m} s$ und $t = \frac{\Delta'''}{Q+1}$. In diesen Gleichungen muſs aber P positiv und Q negativ angenommen werden, wenn das zweite Bild nach 3 fallen soll, und umgekehrt P negativ und Q positiv, wenn es nach 4 fallen soll.

Beispiel. Das zweite Bild soll nach 4 fallen, und $p = 60''$ und $m = 60$ seyn. P sey $= 3$, so ist β negativ. Nun muſs seyn $Q < \frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{18}{27} = \frac{27}{36} \ldots$ und $Q > \frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \frac{24}{36} \ldots$ Man nehme $Q = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$ an, so ist $PQ = \frac{13}{6}$ und $S = \frac{17}{9}$. Dadurch erhält man $\Delta = 61{,}8888$, $q = 2{,}0979$, $\Delta' = 2{,}7877$, $r = 0{,}5953$, $\Delta'' = 0{,}4080$, $s = 0{,}5814$, $\Delta''' = 0{,}3601$ und $t = 0{,}2090$. Die Länge des Fernrohrs ist also $= 65{,}445$ Zoll, es ist folglich um 4,251 Zoll länger, als das vom Hrn. Director *Littrow* (a. a. O. 206) für dieselbe Vergröſserung und Focallänge des Objectives berechnete, hat aber dafür ein doppelt so groſses Gesichtsfeld als dieses.

III.

Mathematisch begründete Höhe der Erdatmosphäre;

vom

Professor *Kržiz* in Przemysl.

Die Bestrebungen um die Ermittlung eines Rechnungausdruckes, der die Bestimmungen der Höhenpuncte mittelst barometrischer Messungen feststellt, haben den Scharfsinn der Gelehrten vom ersten Range in Anspruch genommen. Seit *Pascal* den glücklichen Gedanken aufgefafst, dafs die Länge der Quecksilbersäule im Barometer an höheren Puncten der Erdoberfläche kürzer als in niedrig liegenden Orten seyn müsse, haben *Halley*, der unermüdliche Beobachter *de Luc*, *Ramond*, der grofse *Laplace*, und neuestens noch *Anderson* nebst *Daniell* zur Vervollständigung der barometrischen Höhenformel wesentlich beigetragen. Diese durch einen nahe zweihundertjährigen Zeitraum errungene Ausbeute lohnt indefs die darauf gewandte Mühe reichlich, indem der in seiner gegenwärtigen Gestalt aufgestellte Ausdruck der Höhenmessung nicht nur die Höhenbestimmungen selbst mit erwünschlicher Genauigkeit ergibt, sondern überdiefs auch noch andere mit diesem Geschäfte in verwandtem Bezuge stehende Untersuchungen zu erledigen ein bequemes Mittel bietet. — Die Beantwortung der Frage: Welche Ausdehnung unsere Atmosphäre habe? Ob eine Begrenzung derselben denkbar, wohl gar erweisbar sey? steht mit der barometrischen Höhenformel im nahen Verbande. Man pflegt in den meisten Lehrbüchern der Physik besagten Höhenausdruck in seinen Principien dargestellt aufzuführen, die Feststellung

der Höhe des Luftkreises aber nur in Resultaten anzudeuten. Vielleicht dürfte es einigen Gewinn abwerfen, an die Stelle historisch mitgetheilter Ergebnisse des Calcüls eine einfache Herleitung der Ausdehnung der Atmosphäre aus Rechnungsformen, die beim Vortrage ohnehin entwickelt werden, zu setzen.

Man kann zu dem Zwecke der Höhenbestimmung der Atmosphäre, der Genauigkeit unbeschadet, sich die Verbindlichkeit erlassen, auf die im barometrischen Höhenausdrucke vorkommenden Correctionen Rücksicht zu nehmen, die Wärmecorrection allein ausgenommen. Sehen wir vor der Hand auch von dieser ab, oder lassen wir die atmosphärischen Wärmeverhältnisse einstweilen unberücksichtiget, so hat man, wie bekannt, für die Höhe eines Punctes über der Meeresfläche den Ausdruck

$$x = c\,(\log. P - \log. M),$$

wo P den auf 0° $C.$ zurückgeführten Barometerstand in Linien im Niveau des Meeres, z. B. 28 Pariser Zolle $= 336'''$, M den gleichmäſsig behandelten Stand der Quecksilbersäule an der obern Station, c aber einen der Erfahrung zu entnehmenden Coefficienten bedeutet.

Wendet man vorliegende Gleichung für die Voraussetzung an, daſs der Barometerstand M als der für die *obere Grenze* der Atmosphäre ermittelte gedacht wird, so ist klar, daſs man hat

$$P = 336''', \quad M = 0,$$

also auch

$$x = c\,(\log. 336 - \log. 0) = c\,(\log. 336 + \infty) = \infty,$$

d. h. die Höhe der Atmosphäre entrückt der Möglichkeit einer endlichen Ausdehnung.

Diese Folgerung enthält keinen Widerspruch in sich, wenn man den Begriff der atmosphärischen Luft, als eines rein ausdehnsamen Stoffes, mit Ausschluſs der

ihn modificirenden Wärme feststellt. Professor *Schmidt* erschliefst die hier gewonnene Wahrheit aus Betrachtungen, die einem anderen mathematischen Gesichtspuncte entnommen sind. Siehe *Gilb.* Ann. B. 62, S. 311.

Wir dürfen indefs zur Erzielung brauchbarer Resultate bei unserer Untersuchung den ideellen Zustand der Atmosphäre nicht weiter verfolgen, vielmehr ihn so auffassen, wie er in Rücksicht auf Wärmeverhältnisse sich wirklich darstellt. Über die atmosphärische Wärmeverbreitung hat die Erfahrung Manches bereits aufgeschlossen, wenn gleich ein wesentlicher Punct, das Gesetz der Wärmeabnahme mit wachsender Entfernung von der Erde, bisher aufser dem Bereiche unserer Kenntnisse liegt. Man läfst die Vorstellungen gelten, dafs die Temperatur auch oben, entweder wie die Glieder einer arithmetischen, oder im Sinne der Elemente einer geometrischen Reihe abnimmt, wenn die Abstände von der Erde um gleiche Gröfsen wachsen.

Berücksichtiget man im barometrischen Höhenausdrucke den Wärmezustand der Atmosphäre, so nimmt, wie bekannt, die Höheformel, wenn keine gar grofse Schärfe verlangt wird, die Gestalt

$$x = c\,(\log. P - \log. M)\left(1 + 0.002\,(t + t')\right)$$

an, wo t, t' die beobachteten Temperaturen an der Meeresfläche und an der obern Station bedeuten. Siehe Prof. *Baumgartner's* Naturlehre, dritte Aufl., S. 645 u. f.

Unterwerfen wir den Factor

$$(\log. P - \log. M)$$

denselben Annahmen, wie sie oben festgestellt wurden, so läfst sich, weil der letzte, den atmosphärischen Wärmezustand in der Formel darstellende Factor *wesentlich* ist, zeigen, dafs x nicht jede angebbare Grenze überschreiten kann, vielmehr einer bestimmten Einschrän-

kung unterliegt. Diefs zu übersehen, denke man sich z. B. $t = 0°$, t' aber $= -500° C.$, so ergibt die in der Wärmecorrection vorgenommene Substitution

$$1 + 0.002\,x - 500 = 0,$$

also auch $$x = 0.$$

Im Allgemeinen wird der die Wärmecorrection darstellende Factor verschwinden, wenn

$$t' = -\frac{1 + 0.002\,t}{0.002} \text{ ist.}$$

Wir haben, dieser Betrachtung gemäfs, die Grenze der Atmosphäre erreicht; über diese Grenze hinaus wird der Werth von x negativ, somit die Formel ohne weitere Anwendung. Um aber den Punct in der Atmosphäre zu fixiren, wo $t' = -500° C.$ wird, lege man eines der oben angezogenen Gesetze über die atmosphärische Wärmeabnahme zu Grunde. Wählt man das erste, so lehrt, bei der gewöhnlichen Annahme: »die Temperatur nehme bei einer Erhebung von 121.1 Toisen um 1° *R.* ab,« eine einfache Rechnung, dafs für $t = 0$, die Wärme bei einer Höhe von 48440 Toisen = 12.7 geog. Meilen, nunmehr noch $-400° R. = -500° C.$ betragen wird.

In Ermangelung erfahrungsmäfsig bewährter Kältegrade von 500° *C.* scheint allerdings unser Resultat an das Unwahrscheinliche zu grenzen. Man bedenke aber, dafs die hier gezogene Folgerung in den oben angeführten Gesetzen der atmosphärischen Wärmeverbreitung wohl begründet ist, bei der Wahl des zweiten Gesetzes der abnehmenden Wärme die Kälte von 500° *C.* wohl gar in einer gröfsern Nähe von der Erdoberfläche Platz greifen würde. Da wir ferner über den absoluten Nullpunct der Wärme nicht zu entscheiden vermögen, nebenbei erfahrungsmäfsige Vorstellungen von noch höheren Wärmegraden haben, als die hier angeführten Kälte-

grade sind, so dürften Einwendungen gegen das gewonnene Resultat nicht von besonderer Erheblichkeit seyn.

Der hier befolgte Gang der Schlüsse zeigt überdiefs die mathematische, von jeder Empirie unabhängige Rechtfertigung des Naturgesetzes: »die Wärme dehnt die Luft aus, die Kälte zieht sie zusammen.« Denn bei gleichförmiger Vertheilung der Wärme in der Atmosphäre fanden wir die Höhe des Luftkreises ohne Grenze, bei abnehmender Temperatur aber schränkten wir seine Ausdehnung ein.

Hält mán übrigens die von *Laplace* in seinem *Système du Monde, Chap. X.* gegebene Bestimmung der gröfsten Höhe der Atmosphäre bei 5682.2 geogr. Meilen mit dem Resultate der *Schmidt*'schen Untersuchungen über diesen Gegenstand, welchen zu Folge die Grenze der Atmosphäre zwischen 7 bis 27 geogr. Meilen fällt, hält man diese beiden Bestimmungen zusammen, dann dürfte auf den ersten Blick alles Vertrauen zu beiden Angaben schwinden. Erwägt man aber, dafs *Laplace* die atmosphärischen Wärmeverhältnisse, wie es die Natur seiner Bestimmungsart heischte, unberücksichtiget gelassen, so dürfte sein Resultat dem von uns für die schrankenlose Ausdehnung des Luftkreises angegebenen als annähernd betrachtet werden. Für die begrenzte Atmosphäre weichet unsere mit 12.7 geogr. Meilen gegebene Bestimmung von der *Schmidt*'schen kleineren Angabe zwar ab, der Unterschied darf jedoch bei dem Umstande, dafs das Gesetz der Wärmeabnahme im Luftkreise rein unbekannt, und selbst die mit einiger Wahrscheinlichkeit geltende Regel nicht bedeutungslosen Veränderungen mit den Jahr- und Tageszeiten unterworfen ist, einige Ausgleichung zuläfsig machen.

Wie man nicht die absolute Höhe der Atmosphäre, sondern diejenige, in welcher die noch vorhandene Luft

eine gegebene Dichte hat. aus der barometrischen Höhenformel folgern kann, übergehen wir hier um so mehr, als bereits Andere diesen fraglichen Umstand einer gründlichen Untersuchung unterzogen haben. Siehe *Gehler's* phys. Wört., neue Bearbeitung, B. I., S. 447.

IV.

Über die Integration der Differenzialgleichungen mehrerer Variablen der ersten Ordnung und des zweiten Grades;

von

Joseph L. Raabe.

Einleitung.

Eine jede Differenzialgleichung mit mehr als zwei veränderlichen Gröfsen ist seit *Monge* wenn nicht durch eine, doch immer durch ein System mehrerer Gleichungen integrirbar. Die vor diesem berühmten Geometer, sogar vom unsterblichen *Euler* ausgesprochene Meinung, dafs eine solche Differenzialgleichung, wenn sie den Bedingungen der Integrabilität nicht entspricht, etwas Absurdes ausdrücke, kann in so ferne gerechtfertiget werden, als man derselben durch eine einzige Integralgleichung Genüge thun will; denn die Bedingungsgleichungen der Integrabilität, von denen *Euler* im Anfange des dritten Bandes seiner *Institutiones calculi integralis* spricht, sind nur eine Folge der Annahme, dafs die vorgelegte Differenzialgleichung ein einziges Integrale zulasse; sucht man aber auf gleiche Weise die Bedingungen, unter welchen dieselbe Differenzialgleichung durch ein System mehrerer Gleichungen integrabel ist,

so wird man sich bald überzeugen, dafs eine jede gewöhnliche Differenzialgleichung von n Variablen wenigstens durch ein System von $n-1$ Gleichungen integrirt werden könne.

Allein die Angabe dieses Systems von Integralgleichungen ist in den meisten Fällen mit grofsen Schwierigkeiten verbunden, besonders dann, wenn es sich darum handelt, diese Integralien unter solchen Formen darzustellen, die keine ferneren Integrationen mehr erheischen; als Beispiel will ich blofs das vom unsterblichen *Lagrange* in den *Leçons sur le calcul des fonctions, pag.* 346, gelöste Problem, nämlich die Integration der Differenzialgleichung $dz^2 = dx^2 + dy^2$, anführen.

Viele Probleme dieser Art hat auch *Monge* unter sehr eleganten Formen dargestellt, allein da die Auflösungen derselben sich gröfstentheils auf geometrische Betrachtungen stützen, so kann man sich ihrer in den Fällen, in welchen die Anzahl der Veränderlichen drei übersteigt, nicht mehr bedienen.

Die erste allgemeine Behandlung einer ganzen Classe solcher Differenzialgleichungen hat man den Arbeiten *Pfaff's,* unter den Abhandlungen der Academie der Wissenschaften zu Berlin von den Jahren 1814 und 1815, zu verdanken. Nach diesem berühmten Geometer kann man jede lineare Differenzialgleichung erster Ordnung von $2n-1$ Variablen nicht nur unter den bequemsten Formen, sondern auch durch ein System von blofs n, eine willkürliche Function mit sich führenden, Gleichungen, integriren.

Die früher erwähnte von *Lagrange* durch so einfache Endgleichungen integrirte Differenzialgleichung war die Veranlassung der gegenwärtigen Arbeit. Ich unterwarf nämlich die allgemeinste Differenzialgleichung erster Ordnung und des zweiten Grades einer genauen Un-

tersuchung, und bin zu einigen für diesen Theil des Integralcalculs nicht unwichtigen Resultaten gelangt, die ich in den folgenden Blättern ausführlich aus einander zu setzen Willens bin.

Zuerst wird gezeigt werden, wie jede gewöhnliche Differenzialgleichung der ersten Ordnung und des zweiten Grades von der Form

$$
\left.\begin{aligned}
0 = {} & A_1\,dx_1^2 + A_2\,dx_2^2 + A_3\,dx_3^2 + \ldots + A_n\,dx_n^2 \\
& + 2(A_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + A_{1,3}\,dx_1\,dx_3 + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_{1,n}\,dx_1\,dx_n) \\
& + 2(A_{2,3}\,dx_2\,dx_3 + A_{2,4}\,dx_2\,dx_4 + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_{2,n}\,dx_2\,dx_n) \\
& + 2(A_{3,4}\,dx_3\,dx_4 + A_{3,5}\,dx_3\,dx_5 + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_{3,n}\,dx_3\,dx_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2(A_{n-2,n-1}\,dx_{n-2}\,dx_{n-1} + A_{n-2,n}\,dx_{n-2}\,dx_n) \\
& + 2A_{n-1,n}\,dx_{n-1}\,dx_n,
\end{aligned}\right\} \quad (A)
$$

wo $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die Variablen, und A_1, A_2, etc. $A_{1,2}, A_{1,3}$, etc. bekannte Functionen derselben sind, in eine andere von der Form

$$
\left.\begin{aligned}
dx_1^2 = {} & B_1\,dy_1^2 + B_2\,dy_2^2 + B_3\,dy_3^2 + \ldots \\
& \qquad \ldots + B_{n-1}\,dy_{n-1}^2 \\
& + 2(B_{1,2}\,dy_1\,dy_2 + B_{1,3}\,dy_1\,dy_3 + \ldots \\
& \qquad \ldots + B_{1,n-1}\,dy_1\,dy_{n-1}) \\
& + 2(B_{2,3}\,dy_2\,dy_3 + B_{2,4}\,dy_2\,dy_4 + \ldots \\
& \qquad \ldots + B_{2,n-1}\,dy_2\,dy_{n-1}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2(B_{n-3,n-2}\,dy_{n-3}\,dy_{n-2} \\
& \qquad + B_{n-3,n-1}\,dy_{n-3}\,dy_{n-1}) \\
& + 2B_{n-2,n-1}\,dy_{n-2}\,dy_{n-1},
\end{aligned}\right\} \quad (B)
$$

wo $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ neue Variable, und $B_1, B_2, \ldots B_{1,2}, B_{1,3}$, etc. bekannte Functionen derselben und von x_1 sind, transformirt werden kann.

Ferner wird gezeigt werden, wie man aus der letzten Gleichung (B), die n Variable enthält, immer ein System von $n-1$ linearen Differenzialgleichungen bilden kann, die sämmtlich von der ersten Ordnung sind, und außer den Variablen $x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, noch $n-2$ neue Variable enthalten.

Endlich werde ich mich damit beschäftigen, aus den so eben erwähnten $n-1$ linearen Differenzialgleichungen zu den Integralien der Gleichung (B), folglich auch der vorgelegten (A), überzugehen.

Erste Abtheilung.

Über die Transformation einer Differenzialgleichung von der Form (A) in eine andere von der Form (B).

§. 1.

Es sey, um mit dem einfachsten Falle den Anfang zu machen, folgende Differenzialgleichung zwischen den drei Variablen x_1, x_2, x_3 gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A_1 dx_1^2 + A_2 dx_2^2 + A_3 dx_3^2 \\ \quad + 2(A_{1,2}\, dx_1 dx_2 + A_{1,3}\, dx_1 dx_3) \\ \quad + 2A_{2,3}\, dx_2 dx_3 \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Denkt man sich zwei der Variablen dieser Differenzialgleichung, z. B. x_2, x_3 als Functionen von x_1, und zwei neuen y_1, y_2 ausgedrückt, welches immer möglich ist, denn es kommen zwei neue Größen an die Stelle der zwei alten, so hat man, wenn die Art der Abhängigkeit der Größen x_2, x_3 von x_1, y_1, y_2 einstweilen noch unentschieden gelassen wird, durch Differenziation folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} dx_2 = \frac{dx_2}{dx_1} dx_1 + \frac{dx_2}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_2}{dy_2} dy_2 \\ dx_3 = \frac{dx_3}{dx_1} dx_1 + \frac{dx_3}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_3}{dy_2} dy_2 \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Diese Werthe von dx_2, dx_3 in (1) substituirt, geben

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & X_1\, dx_1^2 + Y_1\, dy_1^2 + Y_2\, dy_2^2 \\ & + 2\,(X_{1,1}\, dx_1\, dy_1 + X_{1,2}\, dx_1\, dy_2) \\ & + 2\, Y_{1,2}\, dy_1 . dy_2, \end{aligned}\right\} . \quad (3)$$

wo der Kürze wegen

$$X_1 = A_1 + A_2 \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + A_3 \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2 + 2\left(A_{1,2}\frac{dx_2}{dx_1} + A_{1,3}\frac{dx_3}{dx_1} + A_{2,3}\frac{dx_2}{dx_1}\frac{dx_3}{dx_1}\right)$$

$$Y_1 = A_2 \left(\frac{dx_2}{dy_1}\right)^2 + A_3 \left(\frac{dx_3}{dy_1}\right)^2 + 2\,A_{2,3}\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dx_3}{dy_1}$$

$$Y_2 = A_2 \left(\frac{dx_2}{dy_2}\right)^2 + A_3 \left(\frac{dx_3}{dy_2}\right)^2 + 2\,A_{2,3}\frac{dx_2}{dy_2}\frac{dx_3}{dy_2}$$

$$X_{1,1} = \frac{dx_2}{dy_1}\left(A_{1,2} + A_2\frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3}\frac{dx_3}{dx_1}\right) + \frac{dx_3}{dy_1}\left(A_{1,3} + A_{2,3}\frac{dx_2}{dx_1} + A_3\frac{dx_3}{dx_1}\right)$$

$$X_{1,2} = \frac{dx_2}{dy_2}\left(A_{1,2} + A_2\frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3}\frac{dx_3}{dx_1}\right) + \frac{dx_3}{dy_2}\left(A_{1,3} + A_{2,3}\frac{dx_2}{dx_1} + A_3\frac{dx_3}{dx_1}\right)$$

$$Y_{1,2} = A_2\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dx_2}{dy_2} + A_3\frac{dx_3}{dy_1}\frac{dx_3}{dy_2} + A_{2,3}\left(\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dx_3}{dy_2} + \frac{dx_3}{dy_1}\frac{dx_2}{dy_2}\right)$$

gesetzt worden ist.

Nun wollen wir die früher noch willkürlich angenommene Abhängigkeit der Gröſsen x_2, x_3 von x_1, y_1, y_2 dergestalt bestimmen, daſs die Coefficienten von $dx_1\, dy_1$, $dx_1\, dy_2$ in der Gleichung (3) verschwinden, wodurch man folgende zwei Gleichungen erhält:

$$X_{1,1} = 0, \quad X_{1,2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welchen offenbar Genüge geschieht, wenn man folgende Gleichungen festsetzt:

$$\left.\begin{aligned} o &= A_{1,2} + A_2 \frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3} \frac{dx_3}{dx_1} \\ o &= A_{1,3} + A_{2,3} \frac{dx_2}{dx_1} + A_3 \frac{dx_3}{dx_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Hieraus findet man

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{A_{1,3}\, A_{2,3} - A_3\, A_{1,2}}{A_2\, A_3 - A_{2,3}^2},$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{A_{1,2}\, A_{2,3} - A_2\, A_{1,3}}{A_2\, A_3 - A_{2,3}^2}.$$

Da durch diese Annahmen für $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$ die Werthe von $\frac{dx_2}{dy_1}$, $\frac{dx_2}{dy_2}$, $\frac{dx_3}{dy_1}$, $\frac{dx_3}{dy_2}$ vermöge der Gleichungen (4) unbestimmt bleiben, so kann man auch die letztern partiellen Differenzialcoefficienten sämmtlich gleich Null setzen, wodurch dann die Gleichungen (2) in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} dx_2 &= \frac{A_{1,3}\, A_{2,3} - A_3\, A_{1,2}}{A_2\, A_3 - A_{2,3}^2}\, dx_1 \\ dx_3 &= \frac{A_{1,2}\, A_{2,3} - A_2\, A_{1,3}}{A_2\, A_3 - A_{2,3}^2}\, dx_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Werden diese zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung integrirt, so erhält man

$$x_2 = \varphi_2(x_1, y_1, y_2),$$
$$x_3 = \varphi_3(x_1, y_1, y_2),$$

wo φ_2, φ_3 bestimmte Functionen, und y_1, y_2 die beiden Constanten der Integrationen sind.

Differenzirt man nun diese Gleichungen unter der Annahme, dafs auch y_1, y_2 variabel seyen, so wird, da die Gleichungen (4) vermöge der Gleichungen (5) immer Statt haben, y_1, y_2 mögen constant oder variabel seyn, die Gleichung (3) folgende Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} dx_1^2 &= B_1\, dy_1^2 + B_2\, dy_2^2 \\ &\quad + 2 B_{1,2}\, dy_1\, dy_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wenn man diese Transformationsmethode auf folgenden besondern Fall

$$(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2 + (x_1\,dx_3 - x_3\,dx_1)^2 + (x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2)^2 - a^2\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = 0\,,$$

oder auf den mit ihm identischen

$$\left.\begin{aligned} 0 = (x_2^2 + x_3^2 - a^2)\,dx_1^2 + (x_1^2 + x_3^2 - a^2)\,dx_2^2 \\ + (x_1^2 + x_2^2 - a^2)\,dx_3^2 \\ - 2\,x_1\,x_2\,dx_1\,dx_2 - 2\,x_1\,x_3\,dx_1\,dx_3 \\ - 2\,x_2\,x_3\,dx_2\,dx_3 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

anwendet, so gehen die Gleichungen (5) in folgende über:

$$0 = x_1 x_2 - (x_1^2 + x_3^2 - a^2)\,\frac{dx_2}{dx_1} + x_2 x_3\,\frac{dx_3}{dx_1}\,,$$

$$0 = x_1 x_3 + x_2 x_3\,\frac{dx_2}{dx_1} - (x_1^2 + x_2^2 - a^2)\,\frac{dx_3}{dx_1}\,.$$

Die Gleichungen (6) geben dann:

$$dx_2 = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 - a^2}\,dx_1\,,$$

$$dx_3 = \frac{x_1 x_3}{x_1^2 - a^2}\,dx_1\,.$$

Integrirt man diese zwei Differenzialgleichungen, so erhält man

$$x_2 = y_1\sqrt{x_1^2 - a^2}\,,$$

$$x_3 = y_2\sqrt{x_1^2 - a^2}\,,$$

wo y_1, y_2 die Constanten der Integrationen sind.

Substituirt man diese Werthe von x_2, x_3, wie auch die Werthe ihrer Differenzialien, wenn nach y_1, y_2 ebenfalls differenzirt wird, so geht die vorgelegte Gleichung (a) in folgende über:

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2 - a^2)^2}{a^2\,(1 + y_1^2 + y_2^2)}\left\{\begin{aligned} (1 + y_2^2)\,dy_1^2 + (1 + y_1^2)\,dy_2^2 \\ - 2y_1 y_2\,dy_1\,dy_2 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

§. 2.

Wie aus dem vorhergehenden Paragraphe erhellet, geht die Transformation der Gleichung (1) in die Gleichung (7) nur dann an, wenn die Gleichungen (6) die Werthe von dx_2, dx_3 nicht unbestimmt lassen. Finden aber was immer für zwei der folgenden drei Gleichungen Statt:

$$A_{1,3}\,A_{2,3} - A_3\,A_{1,2} = 0,$$
$$A_{1,2}\,A_{2,3} - A_2\,A_{1,3} = 0,$$
$$A_2\,A_3 - A_{2,3}^2 = 0,$$

von denen eine immer eine Folge der beiden andern ist, dann erhält man sowohl für dx_2 als für dx_3 die Werthe $\frac{0}{0}$, und die besagte Transformation geht nicht mehr an; allein in diesem Falle, der zwar höchst selten eintritt, läſst sich, wie wir sogleich zeigen wollen, die vorgelegte Differenzialgleichung (1) immer auf eine lineare zwischen denselben Variablen reduciren.

Es finden z. B. die beiden ersten der letzten drei Gleichungen Statt, so gehen sie

$$A_2 = \frac{A_{1,2}\,A_{2,3}}{A_{1,3}}, \quad A_3 = \frac{A_{1,3}\,A_{2,3}}{A_{1,2}},$$

Substituirt man diese Werthe von A_2, A_3 in die vorgelegte Differenzialgleichung (1), so erhält man

$$0 = A_1\,dx_1^2 + \frac{A_{1,2}\,A_{2,3}}{A_{1,3}}\,dx_2^2 + \frac{A_{1,3}\,A_{2,3}}{A_{1,2}}\,dx_2^2$$
$$+ 2\,(A_{1,2}\,dx_1\,dx_2 + A_{1,3}\,dx_1\,dx_3)$$
$$+ 2\,A_{2,3}\,dx_2\,dx_3$$

oder

$$A_{2,3}\,(A_{1,2}\,dx_2 + A_{1,3}\,dx_3)^2$$
$$+ 2\,A_{1,2}\,A_{1,3}\,(A_{1,2}\,dx_2 + A_{1,3}\,dx_3)\,dx_1$$
$$+ A_1\,A_{1,2}\,A_{1,3}\,dx_1^2 = 0,$$

welche Gleichung mit folgender

$$A_{1,2} A_{2,3}\, dx_2 + A_{1,3} A_{2,3}\, dx_3$$
$$+ \left[A_{1,2} A_{1,3} \pm \sqrt{A_{1,2} A_{1,3} (A_{1,2} A_{1,3} - A_1 A_{2,3})}\right] dx_1 = 0$$

identisch, und in Bezug auf ihre Differenzialien linear ist.

§. 3

Wir wollen nun die Transformation der Gleichung (A) in die Gleichung (B) für den Fall von vier Variablen vornehmen.

Man habe also die Differenzialgleichung

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & A_1 dx_1^2 + A_2 dx_2^2 + A_3 dx_3^2 + A_4 dx_4^2 \\ & + 2(A_{1,2} dx_1 dx_2 + A_{1,3} dx_1 dx_3 + A_{1,4} dx_1 dx_4) \\ & + 2(A_{2,3} dx_2 dx_3 + A_{2,4} dx_2 dx_4) \\ & + 2 A_{3,4} dx_3 dx_4 . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Nimmt man nun drei der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4, z. B. die drei letzten als noch unbekannte Functionen der ersten und drei neuer Variablen y_1, y_2, y_3 an, so wird man durch Differenziation haben

$$\left.\begin{aligned} dx_2 &= \frac{dx_2}{dx_1} dx_1 + \frac{dx_2}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_2}{dy_2} dy_2 \\ &\qquad + \frac{dx_2}{dy_3} dy_3 \\ dx_3 &= \frac{dx_3}{dx_1} dx_1 + \frac{dx_3}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_3}{dy_2} dy_2 \\ &\qquad + \frac{dx_3}{dy_3} dy_3 \\ dx_4 &= \frac{dx_4}{dx_1} dx_1 + \frac{dx_4}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_4}{dy_2} dy_2 \\ &\qquad + \frac{dx_4}{dy_3} dy_3 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Werden diese Werthe von dx_2, dx_3, dx_4 in die Differenzialgleichung (8) substituirt, so geht sie in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} o = & X_1 dx_1^2 + Y_1 dy_1^2 + Y_2 dy_2^2 + Y_3 dy_3^2 \\ & + 2(X_{1,1} dx_1 dy_1 + X_{1,2} dx_1 dy_2 + X_{1,3} dx_1 dy_3) \\ & + 2(Y_{1,2} dy_1 dy_2 + Y_{1,3} dy_1 dy_3) \\ & + 2 Y_{2,3} dy_2 dy_3, \end{aligned}\right\} (10)$$

wo man hat

$$\begin{aligned} X_1 = & A_1 + A_2 \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + A_3 \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2 + A_4 \left(\frac{dx_4}{dx_1}\right)^2 \\ & + 2\left(A_{1,2} \frac{dx_2}{dx_1} + A_{1,3} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{1,4} \frac{dx_4}{dx_1}\right) \\ & + 2\left(A_{2,3} \frac{dx_2}{dx_1} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{2,4} \frac{dx_2}{dx_1} \frac{dx_4}{dx_1}\right) \\ & + 2 A_{3,4} \frac{dx_3}{dx_1} \frac{dx_4}{dx_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 = & A_2 \left(\frac{dx_2}{dy_1}\right)^2 + A_3 \left(\frac{dx_3}{dy_1}\right)^2 + A_4 \left(\frac{dx_4}{dy_1}\right)^2 \\ & + 2\left(A_{2,3} \frac{dx_2}{dy_1} \frac{dx_3}{dy_1} + A_{2,4} \frac{dx_2}{dy_1} \frac{dx_4}{dy_1}\right) \\ & + 2 A_{3,4} \frac{dx_3}{dy_1} \frac{dx_4}{dy_1}. \end{aligned}$$

Setzt man in die letzte Gleichung überall, wo y_1 steht, y_2, y_3, so erhält man in derselben Ordnung die Werthe von Y_2, Y_3.

Ferner ist

$$\begin{aligned} X_{1,1} = & \frac{dx_2}{dy_1}\left(A_{1,2} + A_2 \frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{2,4} \frac{dx_4}{dx_1}\right) \\ & + \frac{dx_3}{dy_1}\left(A_{1,3} + A_{2,3} \frac{dx_2}{dx_1} + A_3 \frac{dx_3}{dx_1} + A_{3,4} \frac{dx_4}{dx_1}\right) \\ & + \frac{dx_4}{dy_1}\left(A_{1,4} + A_{2,4} \frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,4} \frac{dx_3}{dx_1} + A_4 \frac{dx_4}{dx_1}\right) \end{aligned}$$

und aus dieser Gleichung erhält man die Werthe von $X_{1,2}$, $X_{1,3}$, wenn in dem Theile rechts derselben statt y_1 in derselben Ordnung y_2, y_3 gesetzt wird.

Endlich ist

$$Y_{1,2} = A_2 \frac{dx_2}{dy_1}\frac{dx_2}{dy_2} + A_3 \frac{dx_3}{dy_1}\frac{dx_3}{dy_2} + A_4 \frac{dx_4}{dy_1}\frac{dx_4}{dy_2}$$
$$+ A_{2,3}\left(\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dx_3}{dy_2} + \frac{dx_3}{dy_1}\frac{dx_2}{dy_2}\right)$$
$$+ A_{2,4}\left(\frac{dx_2}{dy_1}\frac{dx_4}{dy_2} + \frac{dx_4}{dy_1}\frac{dx_2}{dy_2}\right)$$
$$+ A_{3,4}\left(\frac{dx_3}{dy_1}\frac{dx_4}{dy_2} + \frac{dx_4}{dy_1}\frac{dx_3}{dy_2}\right).$$

Läſst man in dem Theile rechts dieser Gleichung y_2 in y_3 übergehen, so erhält man den Werth von $Y_{1,3}$, und wenn in diesem Werthe von $Y_{1,3}$ überall y_1 in y_2 umgesetzt wird, so ergibt sich der Werth von $Y_{2,3}$.

Wählt man nun die Abhängigkeit der Gröſsen x_2, x_3, x_4 von x_1, y_1, y_2, y_3 dergestalt, daſs in der Gleichung (10) jene Bestandtheile, welche mit $dx_1\, dy_1$, $dx_1\, dy_2$, $dx_1\, dy_3$ multiplicirt sind, verschwinden, so muſs man folgende Gleichungen haben:

$$X_{1,1} = 0, \quad X_{1,2} = 0, \quad X_{1,3} = 0.$$

Thut man diesen Gleichungen, unabhängig von den Werthen der partiellen Differenzialcoefficienten $\frac{dx_2}{dy_1}$, $\frac{dx_2}{dy_2}$, $\frac{dx_2}{dy_3}$, $\frac{dx_3}{dy_1}$, $\frac{dx_3}{dy_2}$, $\frac{dx_3}{dy_3}$, $\frac{dx_4}{dy_1}$, $\frac{dx_4}{dy_2}$, $\frac{dx_4}{dy_3}$, Genüge, d. h. sollen die letzten Gleichungen Statt haben, die Gröſsen y_1, y_2, y_3 mögen als constante oder als variable angesehen seyn, so hat man, wie aus den vorhin aufgestellten Werthen von $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{1,3}$ erhellet, bloſs folgenden drei Gleichungen Genüge zu thun:

$$0 = A_{1,2} + A_2 \frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{2,4} \frac{dx_4}{dx_1},$$
$$0 = A_{1,3} + A_{2,3} \frac{dx_2}{dx_1} + A_3 \frac{dx_3}{dx_1} + A_{3,4} \frac{dx_4}{dx_1},$$
$$0 = A_{1,4} + A_{2,4} \frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,4} \frac{dx_3}{dx_1} + A_4 \frac{dx_4}{dx_1}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man, wenn der Kürze

wegen

$$\Delta = A_2 A_{3,4}^2 + A_3 A_{2,4}^2 + A_4 A_{2,3}^2 - A_2 A_3 A_4 - 2 A_{2,3} A_{2,4} A_{3,4}$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dx_1} &= \left\{\begin{aligned} & A_{1,2}(A_3 A_4 - A_{3,4}^2) \\ + & A_{1,3}(A_{2,4} A_{3,4} - A_4 A_{2,3}) \\ + & A_{1,4}(A_{2,3} A_{3,4} - A_3 A_{2,4}) \end{aligned}\right\} : \Delta \\
\frac{dx_3}{dx_1} &= \left\{\begin{aligned} & A_{1,2}(A_{2,4} A_{3,4} - A_4 A_{2,3}) \\ + & A_{1,3}(A_2 A_4 - A_{2,4}^2) \\ + & A_{1,4}(A_{2,3} A_{2,4} - A_2 A_{3,4}) \end{aligned}\right\} : \Delta \\
\frac{dx_4}{dx_1} &= \left\{\begin{aligned} & A_{1,2}(A_{2,3} A_{3,4} - A_3 A_{2,4}) \\ + & A_{1,3}(A_{2,3} A_{2,4} - A_2 A_{3,4}) \\ + & A_{1,4}(A_2 A_3 - A_{2,3}^2) \end{aligned}\right\} : \Delta
\end{aligned}\right| \quad (11)$$

Da, wie bereits erwähnt wurde, diese Bestimmungen von $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$ die Gröſsen $\frac{dx_2}{dy_1}$, $\frac{dx_2}{dy_2}$, etc. unbestimmt lassen, so kann man letztere auch gleich Null setzen, und die Gleichungen (9) gehen daher in folgende über:

$$dx_2 = \frac{dx_2}{dx_1} dx_1, \quad dx_3 = \frac{dx_3}{dx_1} dx_1, \quad dx_4 = \frac{dx_4}{dx_1} dx_1,$$

wenn nämlich für $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$ die Werthe aus den Gleichungen (11) gesetzt werden.

Da ferner diese letzten drei Gleichungen bloſs die vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 enthalten, so lassen sie sich im Allgemeinen durch ein System dreier Gleichungen, die eben so viele willkürliche Constanten enthalten, integriren. Denkt man sich diese Integralien durch folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \varphi_2(x_1, y_1, y_2, y_3), \\
x_3 &= \varphi_3(x_1, y_1, y_2, y_3), \\
x_4 &= \varphi_4(x_1, y_1, y_2, y_3),
\end{aligned}$$

wo φ_2, φ_3, φ_4 bestimmte Functionen, und y_1, y_2, y_3 die früher erwähnten drei Constanten der Integrationen vorstellen, so ist dadurch die Abhängigkeit der Gröſsen x_2, x_3, x_4 von x_1, y_1, y_2, y_3 vollkommen bekannt, und die drei letztern Gröſsen sind zugleich von einer solchen Beschaffenheit, sie mögen constant oder variabel seyn, so wird in beiden Fällen die Gleichung (10) von den Gliedern, welche mit $dx_1\, dy_1$, $dx_1\, dy_2$, $dx_1\, dy_3$ behaftet sind, frei gemacht.

Substituirt man also die Werthe von x_2, x_3, x_4 aus den letzten drei Gleichungen in die vorgelegte (8) oder in (10), so erhält man, wenn man beim Differenziren auch y_1, y_2, y_3 als Variable ansieht, eine Gleichung von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} dx_1^2 = {} & B_1\, dy_1^2 + B_2\, dy_2^2 + B_3\, dy_3^2 \\ & + 2\,(B_{1,2}\, dy_1\, dy_2 + B_{1,3}\, dy_1\, dy_3) \\ & + 2\, B_{2,3}\, dy_2\, dy_3 \end{aligned}\right\} (12)$$

wo B_1, B_2, B_3, $B_{1,2}$, $B_{1,3}$, $B_{2,3}$ bekannte Functionen von x_1, y_1, y_2, y_3 seyn werden.

Als Beispiel wollen wir folgende Differenzialgleichung transformiren:

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - a^2)\, dx_1^2 \\ & \qquad + (x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 - a^2)\, dx_2^2 \\ & + (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 - a^2)\, dx_3^2 \\ & \qquad + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2)\, dx_4^2 \\ & - 2\,(x_1 x_2\, dx_1\, dx_2 + x_1 x_3\, dx_1\, dx_3 + x_1 x_4\, dx_1\, dx_4) \\ & - 2\,(x_2 x_3\, dx_2\, dx_3 + x_2 x_4\, dx_2\, dx_4) \\ & - 2\, x_3 x_4\, dx_3\, dx_4. \end{aligned}\right\} (a')$$

Die Gleichungen (11) geben im gegenwärtigen Falle

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1\, x_2}{x_1^2 - a^2}\, dx_1,$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{x_1\, x_3}{x_1^2 - a^2}\, dx_1$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_1 x_4}{x_1^2 - a^2} dx_1,$$

folglich hat man folgende drei Differenzialgleichungen zu integriren:

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{x_1 dx_1}{x_1^2 - a^2},$$

$$\frac{dx_3}{x_3} = \frac{x_1 dx_1}{x_1^2 - a^2},$$

$$\frac{dx_4}{x_4} = \frac{x_1 dx_1}{x_1^2 - a^2}.$$

Die Integralien sind

$$x_2 = y_1 \sqrt{x_1^2 - a^2},$$

$$x_3 = y_2 \sqrt{x_1^2 - a^2},$$

$$x_4 = y_3 \sqrt{x_1^2 - a^2},$$

wo y_1, y_2, y_3 die willkürlichen Constanten vorstellen.

Substituirt man diese Werthe von x_2, x_3, x_4 in die vorgelegte Differenzialgleichung (a′), indem man auch y_1, y_2, y_3 als Variable betrachtet, so geht sie nach allen Reductionen in folgende über:

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2 - a^2)^2}{a^2(1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)} \left\{ \begin{array}{l} (1 + y_2^2 + y_3^2)\, dy_1^2 \\ + (1 + y_1^2 + y_3^2)\, dy_2^2 \\ + (1 + y_1^2 + y_2^2)\, dy_3^2 \\ - 2(y_1 y_2\, dy_1\, dy_2 \\ \quad + y_1 y_3\, dy_1\, dy_3) \\ - 2 y_2 y_3\, dy_2\, dy_3. \end{array} \right\} \quad \text{(b′)}$$

§. 4.

Nachdem wir nun zwei specielle Fälle vorangeschickt haben, wollen wir die allgemeine Gleichung (A) in die Gleichung (B) transformiren.

Man denke sich nämlich sämmtliche Variablen x_2, x_3, x_4, . . . x_n als noch unbekannte Functionen von x_1, y_1, y_2, y_3, y_{n-1}, so erhält man durch Differen-

ziation folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
dx_2 &= \frac{dx_2}{dx_1}dx_1 + \frac{dx_2}{dy_1}dy_1 + \frac{dx_2}{dy_2}dy_2 + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{dx_2}{dy_{n-1}}dy_{n-1} \\
dx_3 &= \frac{dx_3}{dx_1}dx_1 + \frac{dx_3}{dy_1}dy_1 + \frac{dx_3}{dy_2}dy_2 + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{dx_3}{dy_{n-1}}dy_{n-1} \\
dx_4 &= \frac{dx_4}{dx_1}dx_1 + \frac{dx_4}{dy_1}dy_1 + \frac{dx_4}{dy_2}dy_2 + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{dx_4}{dy_{n-1}}dy_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dx_n &= \frac{dx_n}{dx_1}dx_1 + \frac{dx_n}{dy_1}dy_1 + \frac{dx_n}{dy_2}dy_2 + \ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{dx_n}{dy_{n-1}}dy_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Substituirt man diese Werthe von dx_2, dx_3, dx_4, . . . dx_n in die Gleichung (A), so nimmt sie folgende Form an:

$$\begin{aligned}
o = {} & X_1 dx_1^2 + Y_1 dy_1^2 + Y_2 dy_2^2 + \ldots + Y_{n-1} dy_{n-1}^2 \\
& + 2(X_{1,1} dx_1 dy_1 + X_{1,2} dx_1 dy_2 + \ldots \\
& \qquad \ldots + X_{1,n-1} dx_1 dy_{n-1}) \\
& + 2(Y_{1,2} dy_1 dy_2 + Y_{1,3} dy_1 dy_3 + \ldots \\
& \qquad \ldots + Y_{1,n-1} dy_1 dy_{n-1}) \\
& + 2(Y_{2,3} dy_2 dy_3 + \ldots\ldots + Y_{2,n-1} dy_2 dy_{n-1}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + 2 Y_{n-2,n-1} dy_{n-2} dy_{n-1},
\end{aligned}$$

wo X_1, Y_1, Y_2, . . . Y_{n-1}, $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, . . . $X_{1,n-1}$, $Y_{1,2}$, $Y_{1,3}$, etc. bekannte Functionen der Coefficienten der Gleichung (A) und der einstweilen noch unbekannten partiellen Differenzialcoefficienten

$\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, . . . $\frac{dx_n}{dx_1}$, $\frac{dx_2}{dy_1}$, $\frac{dx_2}{dy_2}$, etc. seyn werden.

Wählt man nun die Abhängigkeit der Gröſsen x_2, x_3, x_4, ... x_n von x_1, y_1, y_2, ... y_{n-1} dergestalt, daſs in der letzten Gleichung sämmtliche Glieder, welche mit $dx_1\,dy_1$, $dx_1\,dy_2$, $dx_1\,dy_3$, ... $dx_1\,dy_{n-1}$ behaftet sind, verschwinden, so müssen folgende Gleichungen zugleich bestehen können:

$$X_{1,1} = 0,\; X_{1,2} = 0,\; X_{1,3} = 0,\; \ldots\; X_{1,n-1} = 0. \quad \text{(D)}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
X_{1,1} = {} & \frac{dx_2}{dy_1}\Big(A_{1,2} + A_2\frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3}\frac{dx_3}{dx_1} + A_{2,4}\frac{dx_4}{dx_1} + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_{2,n}\frac{dx_n}{dx_1}\Big) \\
& + \frac{dx_3}{dy_1}\Big(A_{1,3} + A_{2,3}\frac{dx_2}{dx_1} + A_3\frac{dx_3}{dx_1} + A_{3,4}\frac{dx_4}{dx_1} + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_{3,n}\frac{dx_n}{dx_1}\Big) \\
& + \frac{dx_4}{dy_1}\Big(A_{1,4} + A_{2,4}\frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,4}\frac{dx_3}{dx_1} + A_4\frac{dx_4}{dx_1} + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_{4,n}\frac{dx_n}{dx_1}\Big) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{dx_n}{dy_1}\Big(A_{1,n} + A_{2,n}\frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,n}\frac{dx_3}{dx_1} + A_{4,n}\frac{dx_4}{dx_1} + \ldots \\
& \qquad \ldots + A_n\frac{dx_n}{dx_1}\Big)
\end{aligned}$$

Eben so hat man die Werthe von $X_{1,2}$, $X_{1,3}$, $X_{1,4}$, ... $X_{1,n-1}$, wenn in dem Theile rechter Hand der letzten Gleichung nach derselben Ordnung y_1 in y_2, y_3, y_4. ... y_{n-1} umgetauscht wird; es werden daher sämmtliche Gleichungen (D) Statt haben, wenn man folgende Gleichungen festsetzt:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= A_{1,2} + A_2 \frac{dx_2}{dx_1} + A_{2,3} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{2,4} \frac{dx_4}{dx_1} + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + A_{2,n} \frac{dx_n}{dx_1} \\
0 &= A_{1,3} + A_{2,3} \frac{dx_2}{dx_1} + A_3 \frac{dx_3}{dx_1} + A_{3,4} \frac{dx_4}{dx_1} + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + A_{3,n} \frac{dx_n}{dx_1} \\
0 &= A_{1,4} + A_{2,4} \frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,4} \frac{dx_3}{dx_1} + A_4 \frac{dx_4}{dx_1} + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + A_{4,n} \frac{dx_n}{dx_1} \\
0 &= A_{1,5} + A_{2,5} \frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,5} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{4,5} \frac{dx_4}{dx_1} + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + A_{5,n} \frac{dx_n}{dx_1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= A_{1,n} + A_{2,n} \frac{dx_2}{dx_1} + A_{3,n} \frac{dx_3}{dx_1} + A_{4,n} \frac{dx_4}{dx_1} + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + A_n \frac{dx_n}{dx_1}
\end{aligned}\right\} \text{(E)}$$

Durch das Statthaben dieser Gleichungen geschieht sämmtlichen Gleichungen (D) unabhängig von den Werthen der partiellen Differenzialcoefficienten

$$\frac{dx_2}{dy_1},\ \frac{dx_2}{dy_2},\ \text{etc.}\ \ \frac{dx_3}{dy_1},\ \frac{dx_3}{dy_2},\ \text{etc.}$$

Genüge, folglich kann man in den Gleichungen (C) die Gröſsen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ als constante oder als variable ansehen, so wird man in beiden Fällen der vorgelegten Differenzialgleichung (A) oder der aus ihr mit Hülfe der Gleichungen (C) gefolgerten Differenzialgleichung eine solche Form geben, daſs sie von den Gliedern, welche mit $dx_1\, dy_1,\ dx_1\, dy_2, \ldots dx_1\, dy_{n-1}$ behaftet sind, befreit erscheine.

Für den ersten Fall gehen die Gleichungen (C) in folgende über:

$$d x_2 = \frac{d x_2}{d x_1} d x_1,$$

$$d x_3 = \frac{d x_3}{d x_1} d x_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d x_n = \frac{d x_n}{d x_1} d x_1.$$

Sucht man nun aus den Gleichungen (E) die Werthe von $\frac{d x_2}{d x_1}$, $\frac{d x_3}{d x_1}$, $\frac{d x_4}{d x_1}$, ... $\frac{d x_n}{d x_1}$, und substituirt sie in den Theilen rechts der letzten Gleichungen, so erhält man $n-1$ Differenzialgleichungen zwischen den n Variablen x_1, x_2, x_3, ... x_n, welche, integrirt, folgendes System von Integralien darbieten:

$$x_2 = \varphi_2(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$
$$x_3 = \varphi_3(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$
$$x_4 = \varphi_4(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \varphi_n(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$

wo φ_2, φ_3, φ_4, ... φ_n bestimmte Functionen, und y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} die willkürlichen Constanten der Integrationen vorstellen.

Substituirt man nun diese Werthe von x_2, x_3, x_4, ... x_n, wie auch die Werthe ihrer Differenzialien, wenn man y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} ebenfalls als Variable betrachtet, in die Gleichung (A), so nimmt sie die Form von (B) an.

(Die Fortsetzung folgt.)

V.

Theorie der mittleren Werthe;

von

Dr. *C. Fr. Hauber.*

(Fortsetzung.)

32.

Auf ähnliche Art lassen sich die obigen Sätze auch in dem Falle anwenden, wenn nicht Werthe der gesuchten Gröſsen selbst, sondern Werthe von Functionen dieser Gröſsen durch die Beobachtungen gegeben sind. Statt der zu bestimmenden Gröſsen führt man gewöhnlich Correctionen schon bekannter genäherter Werthe derselben ein, wobei man die höhern Potenzen dieser Correctionen vernachlässigt, so daſs die Functionen, wenn sie auch in Beziehung auf jene Gröſsen nicht lineär sind, doch in Beziehung auf diese Correctionen lineär werden. Diese Correctionen sind dann die gesuchten Gröſsen.

Die gesuchten Gröſsen, deren Anzahl r kleiner sey als die Anzahl s der Beobachtungen, seyen ξ, v, z . . ., und die lineären Functionen derselben, wofür die Beobachtungen die Werthe l_1, l_2, . . . l_n, . . . l_s gegeben haben, resp.

$$F_1 = D_1 + a_1 \xi + b_1 v + c_1 z + \ldots,$$
$$F_2 = D_2 + a_2 \xi + b_2 v + c_2 z + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n = D_n + a_n \xi + b_n v + c_n z + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_s = D_s + a_s \xi + b_s v + c_s z + \ldots$$

Bezeichnen nun wieder ε_1, . . . ε_n, . . . ε_s die unbekannten Fehler der ersten, . . . n^{ten}, . . . s^{ten} Be-

obachtung, so ist

$\varepsilon_1 = l_1 - F_1, \ldots \varepsilon_n = l_n - F_n, \ldots \varepsilon_s = l_s - F_s,$

folglich, wenn man $l_1 - D_1$ durch $\delta_1, \ldots, l_n - D_n$ durch $\delta_n, \ldots, l_s - D_s$ durch δ_s bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{l} -\varepsilon_1 = -\delta_1 + a_1 \xi + b_1 v + c_1 z + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\varepsilon_n = -\delta_n + a_n \xi + b_n v + c_n z + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\varepsilon_s = -\delta_s + a_s \xi + b_s v + c_s z + \ldots \end{array}\right\} (1)$$

Wenn man, um $v, z \ldots$ zu eliminiren, diese Gleichungen resp. mit Factoren $g_1, \ldots g_n, \ldots g_s$ multiplicirt, für welche $\Sigma g_n b_n = 0$, $\Sigma g_n c_n = 0, \ldots$ ist, und sie dann addirt, so wird

$$-\Sigma g_n \varepsilon_n = -\Sigma g_n \delta_n + \xi \Sigma g_n a_n.$$

Nimmt man

$$A_1 = \frac{g_1}{\Sigma g_n a_n}, \ldots A_n = \frac{g_n}{\Sigma g_n a_n}, \ldots A_s = \frac{g_s}{\Sigma g_n a_n},$$

so daſs die Factoren $A_1, \ldots A_n, \ldots A_s$ folgenden Gleichungen Genüge leisten:

$$\Sigma A_n a_n = 1, \quad \Sigma A_n b_n = 0, \quad \Sigma A_n c_n = 0, \ldots, \quad (2)$$

so erhält man

$$\xi = \Sigma A_n \delta_n - \Sigma A_n \varepsilon_n. \quad (3)$$

Multiplicirt man eben so die Gleichungen (1) resp. mit Factoren $B_1, \ldots B_n, \ldots B_s$, für welche

$$\Sigma B_n a_n = 0, \quad \Sigma B_n b_n = 1, \quad \Sigma B_n c_n = 0, \ldots \quad (4)$$

ist, so erhält man

$$v = \Sigma B_n \delta_n - \Sigma B_n \varepsilon_n. \quad (5)$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen (1) resp. mit Factoren $C_1, \ldots C_n, \ldots C_s$, für welche

$$\Sigma C_n a_n = 0, \quad \Sigma C_n b_n = 0, \quad \Sigma C_n c_n = 1, \ldots \quad (6)$$

ist, und addirt sie, so erhält man

$$\zeta = \Sigma C_n \delta_n - \Sigma C_n \varepsilon_n \quad (7)$$

und so fort.

a) Wir wollen zuerst annehmen, die Function φx. in demselben Sinne genommen, wie in Nro. 30, sey für alle s Beobachtungen dieselbe, und auf beiden Seiten von $x = 0$ symmetrisch, also $K = 0$. Setzt man dann $\Sigma A_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma B_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma C_n \varepsilon_n = 0, \ldots$, so erhält man für die gesuchten Gröſsen die genäherten Werthe

$$\xi = \Sigma A_n \delta_n,$$
$$v = \Sigma B_n \delta_n,$$
$$\zeta = \Sigma C_n \delta_n,$$
u. s. w.;

und nach Nro. 19 ist die Wahrscheinlichkeit, daſs der bei dieser Bestimmung von ξ zu befürchtende Fehler $= \Sigma A_n \varepsilon_n$ zwischen den Grenzen

$$\mp t \sqrt{2 K' \Sigma A_n^2}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt,$$

oder der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung von ξ

$$= 0.67449 \sqrt{K' \Sigma A_n^2},$$

wo $\sqrt{\Sigma A_n^2} = \frac{\sqrt{\Sigma g_n^2}}{\Sigma g_n a_n}$ als eine Gröſse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ betrachtet werden kann.

Der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers dieser Bestimmung ist nach Nro. 15, b)

$$M^2 = K' \Sigma A_n^2,$$

wo $K' = \int_{-\omega}^{\omega} x^2 \varphi x \, . \, dx$ der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers einer Beobachtung ist. Die Gröſse $\frac{K'}{M^2}$ heiſst nach *Gauſs* das Gewicht der Bestimmung, das Gewicht einer Beobachtung zur Einheit angenommen,

indem *Gauſs* das Gewicht dem mittlern Werthe des Quadrats des Fehlers umgekehrt proportional setzt; demnach ist das Gewicht der Bestimmung von ξ

$$= \frac{1}{\Sigma A_n^2}.$$

Eben so ist das Gewicht der Bestimmung von v, in demselben Sinne genommen,

$$= \frac{1}{\Sigma B_n^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449 \sqrt{K' \Sigma B_n^2};$$

ferner das Gewicht der Bestimmung von ζ

$$= \frac{1}{\Sigma C_n^2},$$

u. s. w.

b) Die Beobachtungen seyen von verschiedenem Werthe, und $\mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$ sollen dieselbe Bedeutung haben, wie in Nro. 31. Schreibt man

für $\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}, \ldots \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}, \ldots$ resp. $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots \varepsilon_n^*, \ldots$, und eben so

für $\delta_1, \frac{\delta_2}{\mu_2}, \ldots \frac{\delta_n}{\mu_n}, \ldots$ resp. $\delta_1^*, \delta_2^*, \ldots \delta_n^*, \ldots$,

für $a_1, \frac{a_2}{\mu_2}, \ldots \frac{a_n}{\mu_n}, \ldots$ resp. $a_1^*, a_2^*, \ldots a_n^*, \ldots$,

u. s. w.,

so ist der mittlere Werth eines jeden von den Fehlerquadraten $\varepsilon_1^{*2}, \varepsilon_2^{*2}, \ldots \varepsilon_n^{*2}, \ldots = K_1'$, und man erhält statt der Gleichungen (1) folgende:

$$\left.\begin{array}{l} -\varepsilon_1^* = -\delta_1^* + a_1^*\xi + b_1^* v + \ldots, \\ -\varepsilon_2^* = -\delta_2^* + a_2^*\xi + b_2^* v + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\varepsilon_n^* = -\delta_n^* + a_n^*\xi + b_n^* v + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Diese Gleichungen lassen sich eben so behandeln, wie die Gleichungen (1) in dem Falle a), wenn man nur K'_1 an die Stelle des obigen K' setzt. Multiplicirt man die Gleichungen (8) resp. mit Factoren A^*_1, A^*_2, ... A^*_n, ..., welche folgenden Gleichungen Genüge leisten:

$$\Sigma A^*_n a^*_n = 1, \quad \Sigma A^*_n b^*_n = 0, \ldots,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (1) mit Factoren $A_1 = A^*_1$, ... $A_n = \frac{A^*_n}{\mu_n}$, ..., für welche also

$$\Sigma A_n a_n = 1, \quad \Sigma A_n b_n = 0, \ldots$$

ist, so erhält man für ξ einen genäherten Werth

$$= \Sigma A^*_n \delta^*_n = \Sigma A_n \delta_n,$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist

$$= 0.67449 \sqrt{K'_1 \Sigma A^{*2}_n} = 0.67449 \sqrt{K'_1 \Sigma A^2_n \mu^2_n},$$

oder das Gewicht dieser Bestimmung, das Gewicht der ersten Beobachtung zur Einheit angenommen,

$$= \frac{1}{\Sigma A^{*2}_n} = \frac{1}{\Sigma A^2_n \mu^2_n},$$

u. s. w.

c) Darf man nicht voraussetzen, daſs $\varphi x = \varphi(-x)$, also $K = 0$ sey, so sey $x - K = y$ und $\varepsilon_1 - K = f_1$, ... $\varepsilon_n - K = f_n$, ... $\varepsilon_s - K = f_s$; so ist der mittlere Werth der unbestimmten Gröſse y, von welcher f_1, ... f_n, ... f_s die zufälligen Werthe sind, $= 0$, und der mittlere Werth von $y^2 = K' - K^2 = L^2$, und die Gleichungen (1) verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} -f_1 = -\delta_1 + K + a_1\xi + b_1 v + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -f_n = -\delta_n + K + a_n\xi + b_n v + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -f_s = -\delta_s + K + a_s\xi + b_s v + \ldots \end{array}\right\} \quad (9)$$

Diese Gleichungen lassen sich eben so behandeln

wie die Gleichungen (1) in dem Falle a), indem man aufser ξ, v ... auch K oder den constanten Theil des Fehlers als eine gesuchte Gröfse betrachtet, die in jeder Gleichung den Factor 1 hat. Dabei mufs man L^2 an die Stelle des obigen K' setzen.

Da sich nun, wie wir gesehen haben, die Fälle b), c) auf den Fall a) zurückführen lassen, so wollen wir vornehmlich diesen Fall näher betrachten.

33.

Um K' oder den mittlern Werth des Quadrats des Fehlers einer Beobachtung näherungsweise zu bestimmen, substituire man in den Functionen F_1, ... F_n, ... F_s für ξ, v, z ... die genäherten Werthe $\Sigma A_n \delta_n$, $\Sigma B_n \delta_n$, $\Sigma C_n \delta_n$, ... nach Nro. 32, a), und bezeichne die dadurch erhaltenen Werthe von

$$l_1 - F_1, \; \ldots \; l_n - F_n, \; \ldots \; l_s - F_s$$

resp. durch λ_1, ... λ_n, ... λ_s, so ist

$$\lambda_n = \delta_n - a_n \Sigma A_n \delta_n - b_n \Sigma B_n \delta_n - c_n \Sigma C_n \delta_n - \ldots$$

Aber vermöge der Gleichungen (1), (3), (5), (7) hat man

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = \delta_n & - a_n (\Sigma A_n \delta_n - \Sigma A_n \varepsilon_n) \\ & - b_n (\Sigma B_n \delta_n - \Sigma B_n \varepsilon_n) \\ & - c_n (\Sigma C_n \delta_n - \Sigma C_n \varepsilon_n) - \ldots, \end{aligned}$$

folglich ist

$$\lambda_n = \varepsilon_n - a_n \Sigma A_n \varepsilon_n - b_n \Sigma B_n \varepsilon_n - c_n \Sigma C_n \varepsilon_n - \ldots;$$

$$\text{daher} \quad \Sigma \lambda_n^2 = E, \quad (10)$$

wenn man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} \Sigma \varepsilon_n^2 & - 2 \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma A_n \varepsilon_n - 2 \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma B_n \varepsilon_n \\ & \qquad - 2 \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma C_n \varepsilon_n - \ldots \\ & + \Sigma a_n^2 (\Sigma A_n \varepsilon_n)^2 + 2 \Sigma a_n b_n \Sigma A_n \varepsilon_n \Sigma B_n \varepsilon_n \\ & + \Sigma b_n^2 (\Sigma B_n \varepsilon_n)^2 \\ & + 2 \Sigma a_n c_n \Sigma A_n \varepsilon_n \Sigma C_n \varepsilon_n \\ & + 2 \Sigma b_n c_n \Sigma B_n \varepsilon_n \Sigma C_n \varepsilon_n + \Sigma c_n^2 (\Sigma C_n \varepsilon_n)^2 + \ldots \end{aligned}$$

durch E bezeichnet.

a) Setzt man nun (s. Nro. 14) für E seinen mittlern Werth $V = (s - G) K'$, wo man hat (da $\Sigma a_n A_n = 1$, $\Sigma b_n B_n = 1$, $\Sigma c_n C_n = 1, \ldots$, also

$$2 \Sigma a_n A_n + 2 \Sigma b_n B_n + 2 \Sigma c_n C_n + \ldots = 2r \text{ ist)}$$

$$G = 2r - \Sigma a_n^2 \Sigma A_n^2 - 2 \Sigma a_n b_n \Sigma A_n B_n$$
$$- \Sigma b_n^2 \Sigma B_n^2 - 2 \Sigma a_n c_n \Sigma A_n C_n$$
$$- 2 \Sigma b_n c_n \Sigma B_n C_n - \Sigma c_n^2 \Sigma C_n^2 - \ldots,$$

so erhält man für K' einen genäherten Werth

$$= \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s - G},$$

und der mittlere Werth m^2 des Quadrats des bei dieser Bestimmung von K' zu befürchtenden Fehlers ist gleich dem mittlern Werthe von $\left(\frac{E}{s-G} - K'\right)^2$ oder von $\left(\frac{E - V}{s - G}\right)^2$, also

$$m^2 = \frac{V' - V^2}{(s - G)^2} \quad \text{oder} \quad m^2 = \frac{V'}{(s - G)^2} - K'^2,$$

wenn man den mittlern Werth von E^2 durch V' bezeichnet.

b) Betrachtet man $A_n = \frac{g_n}{\Sigma g_n a_n}$, B_n, C_n; ... als Gröfsen von der Ordnung $\frac{1}{s}$, so ist in dem Ausdrucke für G jedes Glied von der Ordnung 1; die Anzahl der Glieder hängt von der Anzahl der gesuchten Gröfsen ab; wenn nun die Anzahl der Beobachtungen viel grösser ist als die Anzahl der gesuchten Gröfsen, so wird man statt $K' = \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s - G}$ auch setzen können

$$K' = \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n^2.$$

Der mittlere Werth m'^2 des Quadrats des bei dieser Bestimmung von K' zu befürchtenden Fehlers ist gleich dem mittlern Werthe von $\left(\frac{E}{s} - K'\right)^2$ oder von

$\frac{1}{s^2}(E - sK')^2$, also

$$m'^2 = \frac{1}{s^2}[V' - sK'(2V - sK')]$$

oder

$$m'^2 = \frac{1}{s^2}[V' - sK'^2(s - 2G)] = \frac{V'}{s^2} - K'^2\left(1 - \frac{2G}{s}\right).$$

Obgleich $V' - sK'(2V - sK')$ gröſser ist als $V' - V^2$, so ist doch nicht nothwendig immer $m'^2 > m^2$, d. h. es muſs nicht immer die Bestimmung von K' nach a) genauer seyn als die nach b).

Es ist nämlich $m^2 > m'^2$, wenn

$$\frac{V'}{(s-G)^2} > \frac{V'}{s^2} + \frac{2GK'^2}{s},$$

d. h. wenn

$$V's^2 > V'(s-G)^2 + 2GK'^2 s(s-G)^2$$

oder $V'(2s - G) > 2K'^2 s(s-G)^2$ ist.

Oder m'^2 ist $= \frac{1}{s^2}[V' - V^2 + G^2 K'^2]$

$$= \frac{1}{s^2}[m^2(s-G)^2 + G^2 K'^2], \quad (11)$$

also $m'^2 < m^2$, wenn $(2s - G)m^2 > GK'^2$ ist.

Der mittlere Werth ven $(\Sigma \varepsilon_n^2)^2$ ist

$$= sK''' + s(s-1)K'^2,$$

wo $K''' = \int_{-\omega}^{\omega} x^4 \varphi x \,.\, dx$ ist; und wenn man die Summe der übrigen Glieder in dem obigen Ausdrucke für E, auſser dem ersten, durch Θ bezeichnet, so ist der mittlere Werth von $2\Theta\Sigma\varepsilon_n^2$

$$= -2G\left(K''' + (s-1)K'^2\right),$$

und der mittlere Werth von Θ^2 gleich einem Aggregate von Gliedern, die theils von der Ordnung 1, theils von der Ordnung $\frac{1}{s}$ sind, das ich durch H bezeichnen will; folglich

$$V' = (s - 2G) K''' + (s-1)(s-2G) K'^2 + H,$$

mithin, wenn man die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{s^2}$ vernachlässigt,

$$\frac{V'}{s^2} = \frac{1}{s}(K''' - K'^2) + \left(1 - \frac{2G}{s}\right) K'^2.$$

Da nun $m'^2 = \frac{V'}{s^2} - K'^2 \left(1 - \frac{2G}{s}\right)$ ist, so erhält man einen genäherten Ausdruck für m'^2

$$= \frac{1}{s}(K''' - K'^2).$$

Eben so ist, wenn man die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{s^2}$ vernachlässigt,

$$m^2 = V'\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2G}{s^3}\right) - K'^2 = \frac{V'}{s^2} + \frac{2}{s} G K'^2 - K'^2$$
$$= \frac{1}{s}(K''' - K'^2).$$

c) Betrachtet man $\frac{1}{s} \Sigma a_n \varepsilon_n$, $\frac{1}{s} \Sigma b_n \varepsilon_n$, ... als Gröſsen von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ (da der mittlere Werth einer jeden von diesen Gröſsen $= 0$, und wenn man sie diesem mittlern Werthe gleich setzt, der wahrscheinliche Fehler eine Gröſse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ist), und eben so $\Sigma A_n \varepsilon_n = \frac{\Sigma g_n \varepsilon_n}{\Sigma g_n a_n}$, $\Sigma B_n \varepsilon_n$, ... oder die Fehler der Bestimmungen von ξ, v ... als Gröſsen von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ (vergl. Nro. 32, a), und setzt man

$$\frac{1}{s} \Sigma a_n \varepsilon_n = \frac{u}{\sqrt{s}}, \quad \frac{1}{s} \Sigma b_n \varepsilon_n = \frac{u'}{\sqrt{s}}, \ldots;$$
$$\Sigma A_n \varepsilon_n = \frac{v}{\sqrt{s}}, \quad \Sigma B_n \varepsilon_n = \frac{v'}{\sqrt{s}}, \ldots;$$

so folgt aus der Gleichung (10)

$$\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n^2 = \frac{1}{s}\Sigma\varepsilon_n^2 - \frac{2}{s}uv - \frac{2}{s}u'v' - \ldots$$

$$+ \frac{v^2}{s^2}\Sigma a_n^2 + \frac{2}{s^2}vv'\Sigma a_n b_n + \ldots$$

Vernachlässigt man nun die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{s}$, so ist

$$\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n^2 = \frac{1}{s}\Sigma\varepsilon_n^2,$$

wofür man nach Nr. 20. setzen kann

$$\frac{1}{s}\Sigma\lambda_n^2 = K',$$

wie in b); der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung von K' ist

$$= 0.67449\sqrt{\frac{1}{s}(K''' - K'^2)},$$

und der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers dieser Bestimmung

$$m'^2 = \frac{1}{s}(K''' - K'^2),$$

wie in b). Wenn $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ ist, so geht dieser genäherte Ausdruck für m'^2 in folgenden über:

$$m'^2 = \frac{2}{s}K'^2.$$

Unter derselben Voraussetzung findet man den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung, wie in Nro. 30, b).

34.

Da nach der Voraussetzung die Anzahl s der Beobachtungen gröſser ist, als die Anzahl r der gesuchten Gröſsen, so gibt es unzählige Systeme von Factoren, welche den Gleichungen (2) oder (4) oder (6) u. s. w. Genüge leisten; daher kann es auch zur Bestimmung der Gröſsen ξ, v, ζ . . . aus den Gleichungen (1) ver-

schiedene Methoden geben, welche aber nicht gleiche Genauigkeit gewähren werden. Zu der Bestimmung der Genauigkeit der Resultate, welche man durch diese Methoden erhält, führen folgende Betrachtungen:

Multiplicirt man die Gleichungen (1) mit r Factorensystemen nach einander, nämlich zuerst mit den Factoren $P_1, \ldots P_n, \ldots P_s$, dann mit den Factoren $Q_1, \ldots Q_n, \ldots Q_s$, dann mit den Factoren $R_1, \ldots R_n, \ldots R_s$, und so fort, und setzt man

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -\Sigma P_n \varepsilon_n, \\ Y &= -\Sigma Q_n \varepsilon_n, \\ Z &= -\Sigma R_n \varepsilon_n, \\ &\text{u. s. w.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -\Sigma P_n \delta_n + \xi \Sigma P_n a_n + \upsilon \Sigma P_n b_n \\ &\qquad + \zeta \Sigma P_n c_n + \ldots, \\ Y &= -\Sigma Q_n \delta_n + \xi \Sigma Q_n a_n + \upsilon \Sigma Q_n b_n \\ &\qquad + \zeta \Sigma Q_n c_n + \ldots, \\ Z &= -\Sigma R_n \delta_n + \xi \Sigma R_n a_n + \upsilon \Sigma R_n b_n \\ &\qquad + \zeta \Sigma R_n c_n + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} (13)$$

Da die Anzahl dieser Gleichungen der Anzahl r der Gröfsen ξ, υ, $\zeta \ldots$ gleich ist, so lassen sich aus denselben durch Elimination ξ, υ, $\zeta \ldots$ unbestimmt durch Ξ, Y, Z, ... ausdrücken.

Man erhält so Ausdrücke von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} + N_{1,1}\,\Xi + N_{1,2}\,Y + N_{1,3}\,Z + \ldots, \\ \upsilon &= \mathfrak{B} + N_{2,1}\,\Xi + N_{2,2}\,Y + N_{2,3}\,Z + \ldots, \\ \zeta &= \mathfrak{C} + N_{3,1}\,\Xi + N_{3,2}\,Y + N_{3,3}\,Z + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} (14)$$

Setzt man dann

$$\left.\begin{array}{l} A_n = P_n N_{1,1} + Q_n N_{1,2} + R_n N_{1,3} + \ldots, \\ B_n = P_n N_{2,1} + Q_n N_{2,2} + R_n N_{2,3} + \ldots, \\ C_n = P_n N_{3,1} + Q_n N_{3,2} + R_n N_{3,3} + \ldots, \\ \text{u. s. w.;} \end{array}\right\} (15)$$

so hat man vermöge der Gleichungen (14), (12), (15) unbestimmt

$$\xi = \mathfrak{A} - \Sigma A_n \varepsilon_n,$$
$$v = \mathfrak{B} - \Sigma B_n \varepsilon_n,$$
$$z = \mathfrak{C} - \Sigma C_n \varepsilon_n,$$
u. s. w.,

woraus vermöge der Gleichungen (1) folgt:

$$\mathfrak{A} = \Sigma A_n \delta_n,$$
$$\mathfrak{B} = \Sigma B_n \delta_n,$$
$$\mathfrak{C} = \Sigma C_n \delta_n,$$
u. s. w.,

$$\Sigma A_n a_n = 1, \quad \Sigma A_n b_n = 0, \quad \Sigma A_n c_n = 0, \ldots$$
$$\Sigma B_n a_n = 0, \quad \Sigma B_n b_n = 1, \quad \Sigma B_n c_n = 0, \ldots$$
$$\Sigma C_n a_n = 0, \quad \Sigma C_n b_n = 0, \quad \Sigma C_n c_n = 1, \ldots$$
u. s. w.

Demnach leisten die auf diese Art gefundenen Factorensysteme $A_1, \ldots A_n, \ldots; B_1, \ldots B_n, \ldots; C_1, \ldots C_n, \ldots$ u. s. w. den Gleichungen (2), (4), (6) u. s. w. Genüge. Setzt man $\Sigma A_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma B_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma C_n \varepsilon_n = 0$, u. s. w., so erhält man

$$\xi = \mathfrak{A} = \Sigma A_n \delta_n,$$
$$v = \mathfrak{B} = \Sigma B_n \delta_n,$$
$$z = \mathfrak{C} = \Sigma C_n \delta_n,$$
u. s. w.

Diese bestimmten Werthe von ξ, v, z . . . sind offenbar dieselben, welche sich aus den Gleichungen (13) durch bestimmte Elimination ergeben, wenn man für Ξ, Y, Z . . . setzt 0, oder wenn man

$$\Sigma P_n \varepsilon_n = 0,$$
$$\Sigma Q_n \varepsilon_n = 0,$$
$$\Sigma R_n \varepsilon_n = 0,$$
u. s. w.

setzt.

Kennt man die Factoren $A_1, \ldots A_n, \ldots$ u. s. w., so findet man die Genauigkeit der Bestimmungen $\xi = \mathfrak{A}$ u. s. w. nach Nro. 32, a).

Für die bei der unbestimmten Elimination erscheinenden Coefficienten $N_{1,1}$, $N_{1,2}$, $N_{1,3}, \ldots$ gelten folgende Gleichungen, die mit den Gleichungen (2) identisch sind:

$$N_{1,1} \Sigma P_n a_n + N_{1,2} \Sigma Q_n a_n + N_{1,3} \Sigma R_n a_n + \ldots = 1,$$
$$N_{1,1} \Sigma P_n b_n + N_{1,2} \Sigma Q_n b_n + N_{1,3} \Sigma R_n b_n + \ldots = 0,$$
$$N_{1,1} \Sigma P_n c_n + N_{1,2} \Sigma Q_n c_n + N_{1,3} \Sigma R_n c_n + \ldots = 0,$$
u. s. w.

Ähnliche Gleichungen haben für $N_{2,1}$, $N_{2,2}$, $N_{2,3}, \ldots$, für $N_{3,1}$, $N_{3,2}$, $N_{3,3}, \ldots$ u. s. w. Statt.

Wird nur *eine* Gröſse ξ gesucht, und gebraucht man das Factorensystem $P_1, \ldots P_n, \ldots$, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\Sigma P_n \delta_n}{\Sigma P_n a_n},$$
$$N_{1,1} = \frac{1}{\Sigma P_n a_n},$$
$$A_n = \frac{P_n}{\Sigma P_n a_n},$$

folglich $\frac{1}{\Sigma A_n^2}$ oder das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$, in demselben Sinne genommen, wie in Nro. 32, a),

$$= \frac{(\Sigma P_n a_n)^2}{\Sigma P_n^2}.$$

Nimmt man z. B. $P_1, \ldots = P_n, \ldots = 1$, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\Sigma \delta_n}{\Sigma a_n}, \text{ und das Gewicht } = \frac{1}{s} (\Sigma a_n)^2.$$

(Die Fortsetzung folgt.)

VI.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Wärme.

1. Die Anwendung des warmen Wassers zur Heitzung von Treibhäusern etc., theoretisch betrachtet. Von *Th. Tredgold.*

(Transact. of the hortic. soc. Vol. VII., P. IV., p. 568.)

Fowler hat in *Gardener's* Magazin (Augustheft 1829) eine ungemein sinnreiche Methode bekannt gemacht, Glashäuser, Bäder etc. mit warmem Wasser zu beheitzen, und diese Zeitschrift hat im VII. Bd., S. 224 davon Nachricht gegeben. Eine zweckmäſsige Anwendung dieser Methode setzt aber voraus, daſs man sie nach physikalischen Grundsätzen zu beurtheilen im Stande sey, und darum muſs wohl eine Darstellung derselben von ihrer theoretischen Seite nützlich seyn, um so mehr, wenn sie von einem Manne herrührt, welcher von seiner grossen Gewandtheit in der Anwendung der reinen physikalischen Grundsätze auf die Bedürfnisse des practischen Lebens schon so viele glückliche Proben abgelegt hat, wie *Tredgold.* Daſs es sich übrigens gegenwärtig, wo wir im Besitze mehrerer sehr sinnreich ausgedachter Beheitzungsmethoden sind, auch noch lohne, diese Methode auf ihre Grundsätze zurück zu führen, geht aus den Vortheilen hervor, welche nach *Tredgold* die hier abzuhandelnde Methode gewährt. Diese bestehen in Folgendem: 1) Man erzielt dadurch eine *gemäſsigte* und *gleichförmige* Temperatur, weil die erhitzten Röhren keine gröſsere Hitze annehmen können, als die des siedenden Wassers. 2) Es läſst sich ein Raum mehrere Stunden lang *ohne weiteres Zuthun* bei der gehörigen

Temperatur erhalten und zum gehörigen Grade erhitzen. 3) Man hat durchaus keinen Rauch oder einen andern unangenehmen Geruch zu besorgen. Für Glashäuser ist diese Methode besonders zu empfehlen, indem man durch sie leicht die Temperatur jedes Clima's und jeder Jahreszeit zu erzielen im Stande ist.

Wir wollen nun zu der Entwicklung der Grundsätze dieser Beheitzungsmethode übergehen, und darin ganz den Fufsstapfen *Tredgold's* folgen.

Man denke sich, um den einfachsten Fall vor Augen zu haben, zwei Gefäfse *A* und *B* (Fig. 19), die sich in derselben Höhe befinden, und mittelst zweier horizontaler Röhren mit einander in Verbindung stehen. Die Gefäfse sind oben offen, und die Röhren *unter* einander angebracht. Sind nun die Gefäfse sowohl als die Röhren mit Wasser gefüllt, und wird unter *A* Feuer gemacht, so steigt die Wasseroberfläche in diesem Gefäfse von *b b* bis *a a*, weil durch die Hitze die Wasserdichte vermindert wird. Sobald die Wassersäule *d c* von der Axe des oberen Rohres im Gefäfse *A* bis zum Wasserspiegel *f* einen gröfseren Druck ausübt, als dieselbe Säule *f e* im Gefäfse *B*, so beginnt die Bewegung durch diese Röhre von *A* gegen *B*, und dadurch wird eine entgegengesetzte Bewegung (von *B* gegen *A*) durch die untere Röhre verursacht. Sind die Röhren nicht gar zu lang, so dauert diese Bewegung fort, bis das Wasser in beiden Gefäfsen nahe dieselbe Temperatur hat. Siedet es in *A*, so erlangt es auch in *B* bald die Siedhitze, weil das Sieden die Bewegung befördert.

Dieser Bewegung des Wassers stehen mehrere Hindernisse im Wege. Diese sind: 1) die Zusammenziehung des bewegten Wasserstrahles an der Mündung der Röhren; 2) die Reibung der Flüssigkeit an den Röhrenwänden, welche mit der Länge der Röhren wächst, und

demnach die Grenze bedingt, innerhalb welcher noch ein Nutzeffect erzielt werden kann. Doch darf man nicht vergessen, daſs bei übrigens gleichen Umständen diese Reibung desto geringer wird, je höher die Temperatur des Wassers steigt; 3) das Erkalten der Flüssigkeit während der Bewegung in den Röhren, indem darin eine Veranlassung zur Bildung zweier Ströme in derselben Röhre liegt; 4) Biegungen und Änderungen in der Gestalt der Röhren.

Was hier vom Wasser gesagt wurde, gilt natürlich von jeder anderen Flüssigkeit, deren Dichte durch Temperaturänderung afficirt wird, und da verschiedene derselben auch bei verschiedenen Hitzegraden sieden, so ist es ein Leichtes, durch dieses Mittel alle Temperaturen innerhalb 30° und 250° *R.* hervorzubringen.

Soll man davon zweckmäſsigen Gebrauch machen können, so muſs man über die Gesetze der Bewegung tropfbarer Körper durch die Wärme im Reinen seyn. Eine allgemeine Untersuchung dieser Gesetze, welche alle Umstände umfaſst, ist ungemein fein und complicirt; es genügt aber, nur jene Umstände zu berücksichtigen, auf welche man in der Ausübung vorzüglichen Bedacht nehmen muſs, und darum wird auch hier nur von den einfachsten hydraulischen Formeln Gebrauch gemacht. Es sey demnach

l = die Summe der Länge aller Röhren in Schuhen;

h = die Höhe der flüssigen Säule im erhitzten Gefäſse vom Centrum (der Axe) der oberen Röhre bis zum Boden;

fe = die Gröſse der Ausdehnung innerhalb der Temperaturen, welche im Durchschnitte der Flüssigkeit in den beiden Gefäſsen entsprechen;

f = die Reibung der Flüssigkeit an der Röhrenwand bei der mittleren Temperatur für eine Röhre von

einem Fuſs Länge und einem Zoll im Durchmesser;

d der Durchmesser der Röhren in Zollen; und endlich

v die Geschwindigkeit in einer Secunde in Schuhen.

Die Reibung in einer Röhre richtet sich nach deren inneren Oberfläche und nach dem Quadrate der Geschwindigkeit, und die mit der Reibung im Gleichgewicht stehende Kraft steht im verkehrten Verhältnisse mit dem Querschnitt der Röhre, daher hat man als Ausdruck für diese Wärme

$$\frac{\pi d l f v^2}{\pi d^2 : 4} = \frac{4 l f v^2}{d}.$$

Aber in der oberen Röhre kommt die Kraft, welche die beobachtete Geschwindigkeit hervorbringt und der Reibung das Gleichgewicht hält, der Gröſse he, um welche die Flüssigkeit steigt, gleich, daher hat man

$$A\left(he - \frac{4 l f v^2}{d}\right) = v^2$$

und

$$v = \sqrt{\frac{Ahed}{d + 4Alf}}.$$

A ist ein constanter, durch Erfahrung zu bestimmender Factor, welcher von der Gestalt der Röhre an ihrer Verbindungsstelle mit dem Wassergefäſse abhängt, und für alle Flüssigkeiten denselben Werth hat. Für die gewöhnliche rechtwinkelige Verbindung, die in Fig. 19 dargestellt ist, hat man $A = 42$. Läuft die Röhre conisch zu, so ist $A = 62$. Auch die Gröſsen e und f fallen der Erfahrung anheim. Den Einfluſs der Cohäsion der flüssigen Theile kann man in der Ausübung vernachlässigen.

Die Ausdehnung der Flüssigkeiten, welche etwa zu dem hier besprochenen Zweck gebraucht werden dürf-

ten, enthält die folgende Tabelle. Diese Ausdehnung bezieht sich auf *einen Reaumure*schen Wärmegrad von der in der ersten Columne angesetzten Temperatur angefangen.

Temperatur nach *R.*	Ausdehnung.			
	Wasser.	Wasser mit Kochsalz gesättiget.	Weingeist.	Olivenöhl.
13°	0.00020	0.00022	0.00133	
18°	31	34	137	
22°	38	40	142	
27°	47	51	146	
31°	56	61	153	0.0007
40°	65	70	169	
49°	69	77	173	
59°	76	83	182	
62°	79	85	188	
67°	81	88		
75°	83	90		
80°	85	92		

Betrüge z. B. die Temperaturdifferenz 8° und die mittlere Temperatur 59°, so wäre die Ausdehnung für Wasser

$$0.00076 \times 8 = 0.0600,$$

für die gesättigte Salzlösung

$$0.00083 \times 8 = 0.00664.$$

Zur näheren Bestimmung der Reibung dient, mit besonderer Rücksicht auf die Wirkung der Temperaturänderung, folgende von *Dubuat (Principes d'Hydraulique, T. II., p.* 13) entlehnte Tafel. Sie ist aus Versuchen mit gläsernen Röhren entnommen.

Flüssigkeit.	Wärmegrad	Bewegende Kraft.	Geschwindigkeit in 1 Sec.	Werth von *f*.
Horizontale Röhre von 0.0178 Z. Durchmesser und 38.5 Z. Länge.				
Regenwasser	14°.2 *R.*	9.45	27.0	0.00183
detto.	30°	16.3	38.2	1537
detto.	36°	10.3	39.3	143
detto.	96°	16.3	39.9	139
Weingeist .	11°.8	5.6	13.8	417
detto.	11°.8	9.45	21.3	317
Horizontale Röhre von 0.257 Z. Durchmesser und 38.5 Z. Länge.				
Regenwasser	3°.1 *R.*	2.2	14.4	0.00207
detto.	9°.3	2.2	15.2	183
Salzwasser	3°.1	2.2	13.6	24
detto.	10°.7	2.2	13.8	231
detto.	10°—12°	5.2	24.8	165
Weingeist .	11°.8	5.3	19.9	294

Nach diesen Versuchen erhält man folgende Resultate:

Temperatur nach *R.*	Werth der Friction für		
	Regenwasser.	Salzwasser.	Weingeist.
3°.1	0.00207	0.0024	
9°.3 } 14°.2 }	183	198	0.00342
30°	1537		
36°	143		
56°	139		

Man kann demnach allgemein bei Anwendung des gemeinen Wassers $f = 0.0014$, für Salz- oder Seewasser $f = 0.0015$ setzen. Führt man diese Werthe in die obige Formel ein, so wird

für gemeines Wasser $v = \sqrt{\frac{42\,h\,e\,d}{d + 0.235\,l}}$,

für Salzwasser . . $v = \sqrt{\frac{42\,h\,e\,d}{d + \frac{1}{4}\,l}}$.

Aus dieser Untersuchung ergeben sich folgende Regeln:

1. Je ausdehnbarer eine Flüssigkeit ist, desto gröſsere Geschwindigkeit erlangt sie bei derselben Temperaturdifferenz.
2. Bei übrigens gleichen Umständen wächst die Geschwindigkeit im geraden Verhältnisse mit der Quadratwurzel aus der Tiefe des Hitzgefäſses, so daſs man bei einer vierfachen Tiefe eines solchen Gefäſses eine doppelte Geschwindigkeit erzielt.
3. Der zweite Wasserbehälter ist nicht absolut nothwendig, sondern kann durch eine Röhre vertreten werden, wie dieses Fig. 20 darstellt. Doch leistet ein solcher gute Dienste, weil er eine Masse heissen Wassers aufnimmt, und selbst, nachdem das Feuer ausgegangen ist, noch die Circulation unterhält.
4. Der Wasserbehälter ist groſs genug, wenn er eine hinlängliche Oberfläche zur Aufnahme der Wärme hat, und so viel Wasser enthält, als nothwendig ist, um durch dasselbe die Hitze von der Quelle an die zu erwärmende Stelle zu führen; nur wenn man die Circulation nach Verlöschung des Feuers noch unterhalten wollte, müſste er gröſser gemacht werden.
5. Soll die Erwärmung nur während der Wirkung des

Feuers vor sich gehen, so gewährt eine im Verhältniſs zur Capacität groſse Oberfläche Vortheile, weil dadurch die Abkühlung, und mithin auch die Geschwindigkeit der Circulation befördert wird.

6. Die Mündung der oberen Röhre soll sich nicht tiefer als einen Zoll unter der Oberfläche des Wassers befinden; sie liegt tief genug, wenn sie nur durch Wasser gesperrt ist, und keine Luft eindringen kann. Je tiefer man sie stellt, desto geringer fällt die Wirkung aus. Die untere Röhre soll da in den Wasserbehälter eintreten, wo die geringste Abkühlung herrscht, und dem erwärmten Wasser auf seinem Wege zur oberen Röhre nicht das geringste Hinderniſs in den Weg setzen.

7. Ist der Wasserbehälter geschlossen, so kann die Röhre in einiger Entfernung davon steigen und sich wieder senken; sie soll aber weder zwei Mal sich heben noch gleich beim Austritt aus dem Behälter sich senken. Wird ein öfteres Steigen der Röhre nothwendig, so soll man lieber eine andere offene Röhre von der verlangten Höhe ansetzen. Dieses ist besonders zu bemerken, wenn die Leitung über eine Thür geht, wie dieses Fig. 21 darstellt.

8. Schon mit einer einzelnen horizontalen Röhre, die zwei Stellen des Wasserbehälters, den Boden desselben ausgenommen, mit einander verbindet, erhält man eine Circulation des Wassers, die desto gröſser ist, je näher die Röhre an der Oberfläche des Wassers liegt; da befinden sich nämlich beide Strömungen in derselben Röhre.

9. Da die Reibung im geraden Verhältnisse mit der Länge und im verkehrten mit dem Durchmesser der Röhrenleitung steht, so wird sie durch jede

Biegung und durch Winkelzüge der Röhre vermehrt.

Da nun die Gesetze der Bewegung einer Flüssigkeit in Röhren als bekannt angenommen werden können, so handelt es sich noch um die Wärmemenge, welche ein Fluidum in einer gegebenen Zeit zuzuführen vermag, und um die Gröſse der Oberfläche, welche nothwendig ist, um dieselbe der Luft des zu erwärmenden Raumes zuzuleiten. Es ist eine Thatsache, daſs eine Flüssigkeit beim Erkalten eben so viel Wärme abgibt, als sie bei der Erwärmung auf die erstere Temperatur aufnimmt, und daſs bei derselben Temperatur gleiche und ähnliche beschaffene Oberflächen der Luft gleich viel Wärme abtreten, daſs demnach die unter gegebenen Umständen abgegebene Wärmemenge dem Calcul unterworfen werden kann.

Die Wärmemenge, welche ein Apparat von der vorher besprochenen Art abgibt, hängt von dem Materiale, aus welchem er besteht, und von seiner Temperatur ab. Zur Berechnung derselben dient folgende Tafel, welche die Siedhitze mehrerer Flüssigkeiten und ihre specifische Wärme enthält, und zugleich die gröſste und die nützliche Temperatur der Oberfläche des Apparates angibt, für den Fall, daſs man eiserne oder gläserne Röhren anwendet.

Name der Flüssigkeit.	Spec. Wärme	Sied-punct.	Gröſste	Nützliche
			Temperatur der Oberfläche.	
Wasser	1	80	70.2	65.8
Seewasser	—	80.9	71.1	66.7
Salzwasser *(brine)* . . .	—	86.2	76.9	71.1
48 Th. Wasser, 52 Th. Alaun	—	83.6	74.7	69.3
55 Th. Wasser, 45 Th. Gyps	—	83.6	74.7	69.3
Steinöhl	0.415	126.2	112.4	94.7
Leinöhl	0.496	252.4	225.8	212.5
Schwefelsäure	0.35	254.7	227.5	214.2

Die Berechnung wird nun nach folgender Regel geführt: Man multiplicirt die Anzahl Kubikfuſs Luft, die in einer Minute erwärmt werden sollen, durch die Anzahl der Wärmegrade, welche die Erwärmung beträgt, und dividirt das Product durch die doppelte Differenz zwischen der bestehenden Temperatur des zu erwärmenden Raumes und jener der Röhrenoberfläche. Der Quotient gibt die Anzahl Quadratfuſs, welche die Heitzröhren haben müssen. Sollen z. B. 1000 Kubikfuſs Luft in einer Minute erwärmt werden, und setzt man für den äuſsersten Fall voraus, daſs bei einer äuſseren Temperatur von $-5°.3$ die Zimmerluft auf 8° gebracht werden soll; so kann man annehmen, daſs, falls das Wasser im Kessel kocht, die Röhrenwand eine Temperatur von 65°.8 habe, und daher beträgt die nöthige Oberfläche der Heitzröhren

$$\frac{1000 \,.\, 13.3}{2\,(65.8 - 8)} = \frac{133000}{1156} = 116 \text{ Quadratfuſs.}$$

Bei Anwendung von Salzwasser würde man

$$\frac{1000 \,.\, 13.3}{2\,(71.1 - 8)} = 106 \text{ Fuſs},$$

beim Gebrauch von Öhl gar nur

$$\frac{1000 \,.\, 13.3}{2\,(212.5 - 1)} = 32\tfrac{1}{5} \text{ Fuſs}$$

Röhrenoberfläche brauchen. Mit verzinnten eisernen oder mit irdenen Röhren würde die Oberfläche der Röhren viel gröſser seyn müssen.

Man sieht, daſs die nöthige Röhrenoberfläche bedeutend verkleinert wird, wenn man eine Flüssigkeit wählt, die, ohne zu sieden, eine höhere Temperatur verträgt. Öhl und Schwefelsäure wären in dieser Beziehung dem Wasser weit vorzuziehen, wenn jenes nicht brennbar wäre, letztere die Röhrenmasse nicht so leicht angriffe.

Bekanntlich erhöht die Wärme, welche im Stande ist, die Temperatur eines Kubikfuſses Wasser um 1° zu steigern; 2850 Kubikfuſs Luft um eben so viel. Ist daher A das Luftvolumen, welches in einer Minute um $t°$ erwärmt werden soll, und x die Differenz zwischen der Temperatur des Wassers im Apparate; so hat man für das Wasservolumen w, welches in einer Minute durch die Röhren flieſsen muſs, um die verlangte Wärme zu liefern, folgende Gleichung:

$$\frac{At}{2850} = wx \quad \text{oder} \quad \frac{At}{2850\,x} = w.$$

Da man nun aus dem Vorhergehenden die Geschwindigkeit des circulirenden Wassers berechnen kann, so braucht man sie nur mit der Area des Röhrendurchschnittes zu multipliciren, um die in einer Minute circulirende Wassermenge zu erfahren, und ist demnach im Stande zu beurtheilen, ob die Röhren Capacität genug haben oder nicht, und welchen Durchmesser sie haben müssen. Wählt man statt Wasser eine andere Flüssigkeit, so wird statt 2850 das Product aus dieser Zahl in die specifische Wärme der Flüssigkeit gesetzt, übrigens aber wie vorhin verfahren.

Die kleinste Wassermenge, welche der Apparat enthalten darf, ist das Doppelte jener, die während einer Circulation abkühlt. Man erhält sie, wenn man die vorhin gefundene Wassermenge w durch die Anzahl der Circulationen, die in einer Minute vor sich gehen, dividirt, und die Geschwindigkeit, mit welcher dieses geschieht, mit der Röhrenlänge vergleicht. Um was mehr Flüssigkeit vorhanden ist, als diese Gröſse ausweiset, kann als Reserve angesehen werden, welche nach dem Ausgehen des Feuers noch Dienste thut.

Gerade darin, daſs ein solcher Apparat selbst noch wirkt, wenn kein Feuer mehr unter dem Wasserkessel

brennt, besteht ein Hauptvorzug dieser Heitzung vor der mit Dämpfen. Da wir die Abkühlungszeit des Wassers kennen, so läfst sich die Zeit berechnen, um welche die beabsichtigte Temperatur des zu heitzenden Locales das Feuer unter dem Kessel überdauert.

Es sey die Temperatur des Wassers um u^0 höher als die des zu heitzenden Raumes, und W das Volumen des ersteren; $\frac{At}{2850}$ die Wassermenge, welche in einer Minute durch einen Querschnitt der Röhren geht. Diesem gemäfs ist auch $\frac{2850\,Wu}{At}$ die Zeit in Minuten ausgedrückt, durch welche die Heitzung mit warmem Wasser das Feuer überdauert, um die daher diese Heitzung länger wirkt als die Dampfheitzung. Ist auch die wirkliche Abkühlungszeit des Wassers zwei Mal gröfser als diese, und nimmt auch die Temperatur desselben gleich nach Wegnahme des Feuers ab, so wird doch dieser Abgang leicht durch die Wände des Hauses ersetzt, welche während der vollen Wirksamkeit des Heitzapparates Wärme aufnehmen, und sie wieder beim Abkühlen der Luft abgeben.

Bei der Beheitzung von Glashäusern soll eine gewisse Temperatur während der ganzen Nacht anhalten. Dazu sind aber grofse Wasserbehälter nothwendig, bei denen die Ungemächlichkeit eintritt, dafs man lange Zeit heitzen mufs, bis das Wasser die zur Heitzung des Raumes nöthige Temperatur angenommen hat. Um diesen Übelstand zu heben und eine schnelle Temperaturerhöhung des Wassers zu erzielen, räth *Tredgold*, die Röhren des Heitzapparates durch Wasser gehen zu lassen, wie dieses die Figur 22 darstellt, bei welcher C der Wasserkasten ist, durch welchen die Röhren gezogen sind. Das Wasser in diesem Kasten erhitzt sich bei

30 *

einer geringen Oberfläche der Röhren bald, indem Wasser von einer erhitzten Fläche in derselben Zeit 10 Mal mehr Wärme aufnimmt, als Luft von derselben Temperatur. Leitet man Röhren, deren Oberfläche etwa $^1/_{10}$ derjenigen beträgt, die man zum Erwärmen des Raumes, um den es sich handelt, bedarf, durch einen solchen eigenen Wasserbehälter, so wird das darin befindliche Wasser bald die Temperatur des in den Röhren enthaltenen annehmen, und den Raum zu heitzen anfangen, sobald nur die Röhren erhitzt werden.

Den Wasserkessel kann man leicht so verfertigen, daſs er am besten erhitzt werden kann. Man gibt ihm die gröſstmöglichste Bodenfläche. Für jedes Bushel (nahe $^1/_2$ Metzen) Kohlen, die in einer Stunde verbrannt werden sollen, darf die Rostfläche nicht weniger als 8 und nicht mehr als 16 Quadratfuſs haben, und die Bodenfläche des Kessels muſs vier Mal gröſser seyn als der Rost. Die Seitenfläche, welche das Feuer bestreicht, soll dann 32 Quadratfuſs betragen.

Man macht den Rost und die Bodenfläche lieber gröſser als kleiner, um auf die Leitung des Feuers weniger Aufmerksamkeit verwenden zu dürfen.

Die Gestalt des Kessels läſst sich auf das Mannigfaltigste abändern. *Atkinson* hat eine parallelepipedische Gestalt gewählt, und das Feuer nur auf die Basis derselben wirken lassen. *Tredgold* wählte dieselbe Gestalt, machte aber die Längendimension gegen die Weite vorwaltend, auch bestrich das Feuer ringsum die Wände des Kessels. Diese Einrichtung dürfte für offene Kessel die einfachste und zweckmäſsigste seyn. *Bailey* gibt dem Kessel eine halbcylindrische Gestalt, die dem Feuer viel Fläche darbietet, wie sie Fig. 20 darstellt, *Cottam* und *Hallen* die in Fig. 23 dargestellte; doch dienen diese Formen nur dann gut, wenn man nur einen kleinen

Wasservorrath braucht. Der schottische Destillirkessel (Fig. 24) ist zweckmäſsig, wo es sich darum handelt, Wärme zu liefern, während ein abgesonderter Wasserbehälter durch Röhren erhitzt wird. Endlich stellt Fig. 22 noch eine andere Kesselform dar, welche bei einer geringen Wassermenge dem Feuer viel Spielraum darbietet. Doch muſs man so complicirte Formen möglichst meiden, weil sie hohe Kosten verursachen, auſser wo man sie aus Guſseisen verfertigen kann, in welchem Falle ein Vortheil eintritt, weil die Wärme möglichst benützt und die Abkühlung bestens vermieden wird. Ein Wasserbehälter, wo der Feuerraum von drei Ziegelwänden umgeben ist, gewährt ein vollkommeneres Verbrennen des Brennstoffes, als ein solcher, in dessen Mitte das Feuer brennt, weil im ersteren Falle das Verbrennen vollkommener vor sich geht.

Das Feuer wird am besten durch eine Aschenthür regulirt, wie sie *Rumford* gebraucht hat.

2. Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren.

(*Bibl. univ. Feb.* 1830, *p.* 314.)

Während des Winters 1828 und 1829 wurden über die Gröſse der Ausdehnung, welche das Wasser beim Gefrieren erleidet, und über die Kraft, mit welcher dieses geschieht, im Arsenal zu Warsav neue Versuche angestellt. Es wurde eine Haubitze von Guſseisen von 6 Z. 8 L. Durchmesser, 1 Z. 2 L. Öffnung und 1 Z. 2 L. Wanddicke, die 46.29 Kubikzoll faſste, bei einer Lufttemperatur von 21° *F.* (= — 4°.88 *R.*) mit Wasser von 41° *F.* (= 4° *R.*) angefüllt. Als das Wasser gefroren war, ragte aus dem Halse der Kugel ein Eiscylinder von dem Durchmesser der Öffnung hervor, und wuchs innerhalb zwei Stunden auf eine Länge von 2 Z. 2 L. an. Weiter fand keine Zunahme desselben Statt, so daſs man daraus

ersehen kann, das Volumen des Wassers habe beim Gefrieren um 2.31 Kubikzoll oder um $^1/_{20}$ zugenommen. Eine andere Kugel wurde mit Wasser gefüllt, mit einem Holzpfropf verkeilt, und dann der oben genannten Temperatur ausgesetzt. Da wurde der Pfropf herausgetrieben, und sein Platz von Eis eingenommen. Eine dritte Kugel wurde, nachdem sie mit Wasser gefüllt war, durch eine eiserne Schraube verschlossen, und wieder obiger Kälte ausgesetzt. Nach 7 Stunden borst die Kugel in zwei ungleiche Theile, wovon der kleinere 10 Fuſs, der gröſsere 7 Fuſs von Ort und Stelle geschleudert wurde, und doch hatte sich nur eine 6 L. dicke Eiskruste gebildet, der Rest war flüssig geblieben. Endlich war noch eine andere Kugel mit Wasser von 46° *F.* (= 6°.22 *R.*) gefüllt, die Öffnung mit einer 6 L. dicken Schraube geschlossen und in die Luft gebracht, die eine Temperatur von 28° *F.* (= — 1°.77 *R.*) hatte. Auch diese borst in zwei ungleiche Theile, deren einer 4 Fuſs weit hinweg flog. Die entstandene Eiskruste war 13 L. dick, der Rest blieb flüssig. Bei einem ferneren Versuche dieser Art betrug die Dicke der Kruste Eis, welches sich beim Bersten der Kugel zeigte (das wieder bei 28° *F.* erfolgte), 5 Linien.

3. Anwendung erhitzter Luft in Hochöfen.

(*Jameson's* Journal, Jänner 1830.)

In den Eisenwerken zu Clyde wendet man nun schon seit längerer Zeit statt der kalten Luft, welche die Gebläse zuführen, heiſse an, und will erfahren haben, daſs man dabei $^1/_4$ Kohlen erspare. Dieses vermochte zu bewirken, daſs bereits alle Gebläse dieser Werke mit heisser Luft versehen wurden. Man erhitzt nämlich die Luft, bevor sie ins Gebläse kommt, in guſseisernen, den Dampfkesseln ähnlichen Gefäſsen auf 220° *F.* (= 85°.3 *R.*). Eine

noch höhere Temperatur, glaubt man, dürfte noch vortheilhafter wirken, doch müſste man erst darüber einen Versuch anstellen. Wären alle Hochöfen Groſsbrittaniens auf diese Weise eingerichtet, so ginge daraus wenigstens eine jährliche Ersparung von 200,000 Pf. Sterling hervor.

B. Optik.

1. Bemerkungen über Farben. Von *Brockedon.*

(Quart. Journ. N. XIV., p. 399.)

Brockedon hat in der Sitzung der *Royal Institution* am 4. Juni l. J. einige Bemerkungen über die Farben im Auge vorgelesen, die für den Physiologen und Physiker gleich interessant sind, für letzteren besonders darum, weil von einigen sehr einfachen Mitteln die Rede war, durch welche man die so wichtigen Erscheinungen zusammengesetzter und complementärer subjectiver Farbenempfindungen leicht hervorbringen kann.

Verzeichnet man auf Papier mit dicken Linien ein gleichseitiges Dreieck, und macht eine dieser Linien roth, die andere blau, die dritte gelb, so werden an den Durchschnitten derselben zusammengesetzte Farben erscheinen, und zwar dort, wo sich Roth und Gelb schneiden, Orange, wo sich Roth und Blau decken, Purpurroth, und wo Blau und Gelb zusammentreffen, Grün. Von diesen Farben steht immer eine aus zwei Hauptfarben (so nennt *Brockedon* die rothe, blaue und gelbe) bestehende zusammengesetzte der dritten Hauptfarbe gegenüber. Man ziehe nun um das Dreieck einen breiten Kreis, mahle in die Linien, welche von der mittleren Stelle jeder der sechs Farben des Dreieckes zum Kreis gehen, diese Farbe, und lasse die Farben sich

mischen, so dafs z. B. das Roth desto mehr in Gelbroth übergeht, je näher es dem Gelb kommt, bis es endlich in der Mitte zwischen Roth und Gelb Orange wird, und darüber hinaus das Gelb immer mehr vorherrschend erscheint, bis das Roth ganz verschwindet, und am gelben Radius nur das Gelb allein zum Vorschein kommt. Dieses geht dann immer mehr und mehr durch Beimischung von Blau in tieferes Grün über, das Blau durch Beimischung des Roth in Purpurroth, bis der Kreis mit Roth endiget. Auf diesen Kreis oder vielmehr Ring lege man eine papierene Scheibe, die sich um eine durch ihren und des farbigen Ringes Mittelpunct gehende Axe dreht, und zwei diametral entgegengesetzte Längenausschnitte hat, durch welche man die Farben des Ringes sieht. Wie diese Scheibe auch gedreht werden mag, so sind doch immer die Farben, welche man durch die zwei Ausschnitte sieht, complementär, d. h. sie ergänzen sich zu Weifs. Sieht man z. B. zugleich Roth und Grün, so wird beim Drehen der Scheibe das Roth in dem Mafse in Purpur übergehen, in welchem das entgegenstehende Grün gelber wird, bis endlich vollkommen reines Purpur dem reinen Gelb gegenüber zu stehen kommt. Sieht man eine der zwei Farben lange genug unverrückten Auges an, und deckt sie dann mit einem weifsen Blatt, so sieht man auf demselben die Farbe, welche der gegenüber stehende Ausschnitt darstellt.

Brockedon meint in der Erweckung der complementären Farben durch ihre Hauptfarben einen Grund für die bekannte gröfsere oder kleinere Verträglichkeit oder Harmonie der neben einander befindlichen Farben zu finden. Bekanntlich wird das Auge unangenehm afficirt, wenn zwei Hauptfarben, wie z. B. Roth und Blau, jede besonders auf dasselbe vorzüglich einwirken. Wirket nämlich jede derselben allein für sich, so fordert jede

ihre complementäre Farbe; in beiden derselben kommt aber Gelb vor, denn die complementäre Farbe von Roth ist Grün, d. h. Blau und *Gelb*, die des Blau hingegen Orange, d. h. Roth und *Gelb*, und dieser Überschufs an Gelb ist es gerade, der dem Auge wehe thut.

Brockedon spricht auch von eigenen Instrumenten, die *Field* in Isleworth erfunden haben soll, und welche dazu dienen, die Intensität und den Ton zusammengesetzter Farben zu messen. Eines derselben besteht aus drei hohlen keilartigen, mit Glaswänden versehenen Gefäfsen, die so gefafst sind, dafs man einen Lichtstrahl nach Belieben durch alle drei oder durch eines oder das andere derselben leiten kann. Jedes derselben enthält einen Stoff, dessen Farbe eine Hauptfarbe ist, und zwar das eine rothe Kraptinctur, das andere blaue schwefelsaure Kupferlösung, und das dritte gelbe eine chromsaure Kalklösung oder Safrantinctur. Diese Flüssigkeiten haben einen solchen Farbenton, dafs ein mitten durch alle drei Gefäfse gehender Strahl auf weifsem Papier aufgefangen weifs erscheint. Nimmt man das Gefäfs mit der rothen Flüssigkeit hinweg, so erscheint dieser Strahl grün, hingegen purpurroth oder orange, wenn man das Gefäfs mit der gelben oder blauen Flüssigkeit wegnimmt. Wendet man die Gefäfse gegen den einfallenden Strahl, so dafs derselbe durch dickere Schichten der Flüssigkeit gehen mufs, so erleidet die Farbe des durchgelassenen Lichtes eine Modification, und wenn man die Stellung, wo der Strahl mitten durch ein solches Prisma geht, als Nullpunct der Farbenscale ansieht, so kann man leicht durch verschiedene Neigungen der Prismen alle Grade der Farbenscale finden. *Field* nennt dieses Instrument *Chromometer*.

Ein anderes Instrument von demselben Erfinder besteht aus einer plan-conischen Linse, oder, wie *Field*

es nennt, aus einem linsenförmigen Prisma. Mittelst dieses Instrumentes kann er das zerstreute Licht so modificiren, daſs durch dasselbe irgend ein farbiger Strahl, z. B. ein gelber, auf ein Auge, ein anderer, z. B. ein blauer, auf das andere Auge fällt, und dadurch die Empfindung von Grün hervorgebracht wird. *Brockedon* hat denselben Versuch mit flachen Fläschchen angestellt, welche die farbigen Flüssigkeiten zur Füllung der oben genannten Gefäſse des Chromometers enthielten.

Er hielt die flache Seite einer solchen Flasche mit der gelben Flüssigkeit an das eine, und die einer anderen, welche die blaue Flüssigkeit enthielt, an das andere Auge; da zeigte sich durch das Zusammenwirken beider Farben Grün. Sah man lange mit einem Auge durch eine solche Flüssigkeit, so erschien bald am anderen Auge die complementäre Farbe derselben, und beide Farben neutralisirten sich. Merkwürdig ist die Erscheinung, welche sich darbot, als man schief durch die Flaschen sah, und wo die reine, die complementäre und die resultirende Farbe zugleich erschienen. Wurde das rothe Glas an der rechten Seite, das blaue an der linken vor das Auge gehalten, und beide mit der Nase völlig in Berührung gebracht, hierauf aber gegen ein Fenster hingesehen, so daſs man mit jedem Auge bei der Flasche vorbei das Fenster erblicken konnte; so erschien der mittlere Theil, wo sich die Farben deckten, purpurroth. Zuerst nahm das rechte Auge Roth wahr, und das linke Blau, doch traten die complementären Farben bald so mächtig hervor, daſs der Himmel, den man durch das Fenster sah, an der rechten Seite schön blaugrün, an der linken Seite roth Orange erschien, und man nicht mehr recht wuſste, in welcher Hand man das rothe, in welcher man das blaue Glas hielt. Die Intensität der dem Auge sich darstellenden

Farben läfst bald nach, und wird endlich durch die complementäre ganz aufgehoben. Hält man die flache Seite eines der farbigen Gläser vor ein Auge, so erregt das Blau des rechten Auges Orange, das Gelb des linken Purpurroth; entfernt man die Gläser, so erscheinen mit beiden Augen für einen Augenblick alle Objecte röthlich, doch kann man es durch schnelles und abwechselndes Öffnen des einen und anderen Auges dahin bringen, dafs eine Weile hindurch alle Gegenstände dem rechten Auge orange, dem linken purpurroth erscheinen.

Brockedon sucht auch einen ferneren Grund für das Entstehen der complementären Farben in dem anatomischen Bau des Auges. Er vermuthet, die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen, deren verschiedene Intensität, deren verschiedenes Vermögen zu erwärmen, zu magnetisiren, chemische Wirkungen hervorzubringen, längst bewiesen ist, dürften auch ein verschiedenes Erregungsvermögen für ein so empfindliches Organ, wie das Auge ist, haben. Zugleich meint er, man könne nach Dr. *Jacob's* in Dublin Entdeckung im Auge einen besondern Theil annehmen, welcher mit dem parallelen, das Licht beugenden Streifen versehen ist, deren Entfernung sich ändert, so wie durch die verschiedene Erregung von Seite eines Lichtstrahles das hinter diesem gestreiften Organe liegende und dasselbe berührende *pigmentum nigrum* in die Gefäfse, welche jene Streifen bilden, eindringt. Übrigens sieht *Brockedon* dieses als blofse Hypothese an, und überläfst es Denen, welche mehr anatomisch-physiologe Kenntnisse besitzen, als er, dieselbe weiter zu prüfen.

2. Achromatische Linsen für Mikroskope. Von *J. Lister.*

(Phil. trans. 1830 *P. I., p.* 187.*)*

Die Leistungen achromatischer über einander geschraubter (aplanatischer) mikroskopischer Objectivlinsen sind wohl den meisten Kennern der Physik aus der Erfahrung bekannt, und lassen sich auch aus mathematischen Betrachtungen leicht einsehen. Erstere erweckt wohl bei jedem Freunde einer genaueren Einsicht in die Natur der optischen Instrumente den Wunsch, sie aus Gründen zu begreifen, letztere führen meistens zu Formeln, deren nähere Analyse nicht Jedermanns Sache ist, und so bleibt für Manchen noch der Wunsch übrig, das, was solche aplanatische Linsen leisten, aus der Natur der Sache verständlich dargestellt zu sehen. In dieser Beziehung dürfte *Lister's* Arbeit nicht unwillkommen seyn, um so mehr, als sie noch einige historische Notizen enthält, die wenigstens gut zusammengestellt sind, wenn auch der gründliche Kenner der mathematischen Optik nichts Neues darin finden sollte.

Die erste achromatische mikroskopische Linse, sagt *Lister*, wurde in England im Jahre 1824 construirt, sie war eine dreifache. *Tulley* hat sie auf Betreiben *Goring's* verfertiget. Sie mag immerhin ohne Wissen dessen, was in Deutschland in dieser Beziehung geleistet worden ist, zu Stande gekommen seyn, doch ist gewiſs, daſs in Frankreich *Selligue*, in Deutschland *Fraunhofer*, in Italien *Amici* lang vor dieser Zeit achromatische Linsen für Mikroskope verfertiget haben (ja das Wiener Museum besitzt seit dem Jahre 1818 ein Mikroskop mit achromatischen Linsen von der Hand des Wiener Optikers *Voigtländer*). *Selligue's* Linse besteht aus einer plan-concaven Flintglaslinse und aus einer doppelt convexen Crown-

oder Tafelglaslinse, die inneren Flächen beider sind durch Kitt mit einander verbunden. Das Eigenthümliche und eigentlich Originelle bestand darin, daſs zwei solche Doppellinsen von $1\,^1/_2$ — $1\,^7/_8$ Z. Focallänge zusammengeschraubt sind, und sowohl einzeln als vereint gebraucht werden können. Die aus ihrer Vereinigung hervorgehende Linse war zwar ziemlich frei von der chromatischen Abweichung, aber ihre sphärische war sehr groſs, weil sie mit ihren convexen Seiten vorausgewendet in die Fassung befestiget waren. Man muſste ihre Öffnung sehr klein nehmen, um diese Abweichung nur einiger Maſsen zu beschränken. *Chevalier* in Paris scheint zuerst den Fehler dieser Zusammenstellung bemerkt zu haben. Er suchte ihm dadurch zu steuern, daſs er die Linsen mit ihren flachen Seiten voranstellte, auch machte er sie mit kürzerer Brennweite, und gab ihnen einen besseren Achromatismus. Sein so verfertigtes Mikroskop kam im Jahre 1825 zu Stande. Sein schärfstes Glas hatte 0.4 Z. Brennweite, doch muſste er allen noch eine viel zu kleine Öffnung geben, als daſs sie hätten etwas Ausgezeichnetes leisten können. Seit dieser Zeit hat er mehrere Objective auf einmal gebraucht, doch scheint er nicht alle Vortheile benützt zu haben, welche die Verbindung mehrerer achromatischer Objective erlaubt.

Fraunhofer's Linsen haben auch, wie die französischen, plan-concave Flintglaslinsen, doch sind sie nicht zusammengekittet, und ihre inneren Flächen berühren sich nicht. *Brown* brachte *Lister'n* fünf Stück solcher Linsen jüngst aus München, sie hatten eine Brennweite von 1.8 — 0.43 Z., und lassen sich wie die französischen über einander schrauben. Wäre *Brown*, der im Jahre 1829 in Deutschland war, auch nach Wien gekommen, so würde er daselbst ähnliche Linsen bei *Plöſsl* gefun-

den, und sich die Überzeugung verschafft haben, daſs man daselbst eher oder gewiſs nicht später als in München Mikroskope mit nach *Selligue's* Weise verbundenen Linsen verfertiget habe und noch verfertiget, die denen von irgend einem Künstler nicht nachstehen, ja sie vielleicht übertreffen. Wir können bezeugen, daſs *Plöſsl*, ohne von den Versuchen der Franzosen etwas zu wissen, selbst auf den Gedanken kam, diese Combination der Linsen vorzunehmen.

Amici in Modena beschäftigte sich seit 1815 mit der Construction achromatischer Objective für Mikroskope, konnte es aber nicht dahin bringen, seine achromatischen Instrumente von gleicher Güte mit seinen Spiegelmikroskopen zu verfertigen, darum gab er sein Unternehmen auf, aber der Bericht über *Selligue's* Leistung im Jahre 1824 vermochte ihn, seinen alten Plan aufs Neue zu verfolgen, und es gelang ihm, durch Verbindung achromatischer Linsen vorher ungesehene Wirkungen hervorzubringen. Solche Linsen brachte er im Jahre 1827 nach London mit, doch soll er seit dieser Zeit noch vorzüglichere von 2 7 L. Focallänge und 2.7 L. Öffnung zu Stande gebracht haben. Den Lesern dieser Zeitschrift ist aus Bd. VII., S. 257 derselben bekannt, wie man in Wien *Amici's* Mikroskop fand.

So viel in Betreff der Geschichte dieser wichtigen optischen Entdeckung; nun wollen wir hören, was *Lister* über die Wirkungen aplanatischer Linsen sagt.

Die Leistungen der Linsen, welche mit einander zu einer einzigen verbunden werden, richten sich nach ihrer Vollkommenheit in Betreff ihrer sphärischen und chromatischen Abweichung, und nach der Gröſse ihrer Öffnung; letztere ist bei mikroskopischen Linsen von besonders groſsem Belange, weil ein groſsbasiger Strahlenbüschel zur Erzeugung eines hellen Bildes unerläſs-

lich ist, und Helligkeit vor allem gefordert wird. Wenn die Stelle, wo sich die Strahlen, welche von einem Puncte des Objectes kommen, hinter dem Objective vereinigen, nicht ein Punct, sondern ein wie immer kleiner Kreis ist, so erscheint dieser als Kreis, sobald man ihn durch das Ocular nur einiger Maſsen vergrössert ansieht. Je gröſser die Lichtstärke des Bildes ist, desto weniger erkennt man jene Vereinigungsstelle der Strahlen als einen Kreis; darum verliert jedes Bild durch Schwächung des Lichtes seine scharfe Begrenzung.

Dieses ist besonders bei undurchsichtigen Objecten, z. B. an einem sehr kleinen Quecksilbertropfen bemerklich, unterbleibt aber auch bei durchsichtigen nicht, und gibt ihnen ein besonderes gesprenkeltes Ansehen, so daſs ihre Oberfläche wie mit kleinen Kügelchen besäet erscheint; eine optische Täuschung, die bereits viele Speculationen über organische Stoffe veranlaſst hat.

Achromatische Objective, welche eine gröſsere Öffnung vertragen, und daher einen stärkeren Lichtkegel aufnehmen, sind diesem Fehler wenig unterworfen, sie gestatten ohne Undeutlichkeit der Bilder eine sehr bedeutende Vergröſserung, und lassen an den Bildern oft die merkwürdigsten Details wahrnehmen, wie z. B. die feinen Linien auf den Schuppen der Schmetterlingsflügel. Dazu tragen aber die Randstrahlen am meisten bei, denn an Objecten, wo solche Linien sehr schwer zu sehen sind, wie z. B. an dem *Alucita hexadactyla, Podura plumbea,* bemerkt man sie am deutlichsten, wenn man die Centralstrahlen abhält.

Sehr wichtig ist es, daſs bei solchen Linsen das rechte Verhältniſs zwischen der Brennweite und der Öffnung hergestellt sey. Dieses richtet sich nach der Dicke der Linsen, nach ihrer Verbindungsweise etc. Für eine bestimmte Linse läſst sich die Öffnung durch

folgenden Versuch bestimmen: Man lege ein Blatt Papier auf einen Tisch, stelle das Mikroskop, dessen Objectivglas in der betreffenden Beziehung untersucht werden soll, darauf, gebe seinem Körper eine horizontale Richtung, und bringe vor demselben und seitwärts in der Entfernung von einigen Schuhen ein Kerzenlicht an, so daſs durch dasselbe nur die eine Hälfte des Gesichtsfeldes erleuchtet werde, die andere Hälfte hingegen dunkel bleibe. Sobald dieses der Fall ist, ziehe man auf dem Papier längs eines Fuſses des Mikroskopes eine gerade Linie. Hierauf drehe man das Mikroskop so, daſs die andere Hälfte des Gesichtsfeldes beleuchtet erscheine, die vorhin beleuchtete hingegen dunkel bleibe, und ziehe längs desselben Fuſses wieder eine gerade Linie auf dem Papiere, Der Winkel, welchen die zwei so gezogenen Linien einschlieſsen, ist die Basis des Strahlenkegels, der eintritt, mithin das Maſs der Öffnung. Es ist klar, daſs man nicht unumgänglich nothwendig hat, wie *Lister* vorschreibt, den Körper des Mikroskopes horizontal zu stellen, man kann den Beleuchtungsspiegel so wenden, daſs bei einem verticalen Stande des Mikroskopes alles so ausfällt, als gelangte das Licht unmittelbar in das horizontal stehende Mikroskop; doch muſs man in diesem Falle Sorge tragen, daſs ja während des Drehens des Mikroskopes der Spiegel unverändert in seiner Lage bleibe. Groſse Öffnungen sind mit kurzen Brennweiten und groſsen Wölbungen der Linsen nicht verträglich wegen der eintretenden sphärischen Abweichung, denn die Correction der sphärischen Abweichung in der convexen Linse durch die concave ist am Umfange der letzteren gröſser als nahe an der Axe. Linsen, wo die Brechung auf mehrere Flächen vertheilt ist, also solche, die aus drei Theilen bestehen, vertragen daher eine gröſsere Öffnung zum groſsen Vortheil

der Deutlichkeit und Lichtstärke. Noch vortheilhafter wird demnach die Einrichtung nothwendig seyn müssen, wenn gar zwei oder drei solche dreifache Linsen mit einander verbunden werden, weil da die Brechung auf noch mehrere Flächen vertheilt ist. So z. B. vertrugen die Linsen *Tulley's* von 0.9 Z. Brennweite, wenn sie einzeln gebraucht werden sollten, nur eine Öffnung von 20°, zusammen konnten sie aber eine Öffnung von 38° erhalten. Die Linsen *Amici's* lassen sich ihrer Krümmung wegen nicht einzeln brauchen, aber jene Doppellinsen, bei welchen die Flintglaslinse plan-concav ist, besonders die *Utzschneider*'schen, lassen sich auch, jede für sich allein, anwenden. Man sollte schon daraus schliefsen, dafs ihre Verbindungen keine reinen Bilder zu geben im Stande wären, dieses ist aber nur bei einigen Verbindungen mehrerer mit einander der Fall, wo wirklich das Bild an bedeutenden Undeutlichkeiten leidet.

Für solche zusammengesetzte Linsen werden die Flintglasbestandtheile am besten plan-concav gemacht, und mit dem Crownglastheile zusammengekittet. Eine plane Fläche statt einer gekrümmten mag ursprünglich wohl nur der Einfachheit wegen gewählt worden seyn, allein sie gewährt wirklich reelle Vortheile, indem man die gehörige Centrirung der Flintglaslinse leichter erzielt. Durch Zusammenkitten beugt man dem zu grossen an den vielen Flächen einer aus mehreren Theilen bestehenden Linse Statt findenden Lichtverluste vor.

Die Linsen, welche *Leister* zu untersuchen Gelegenheit hatte, waren aus Tafelglas und aus englischem oder schweizerischem Flintglase verfertiget, und für einen Punct aplanatisirt, welcher in der Axe in der Nähe der Brennpuncte lag, so dafs die von demselben ausgehenden Strahlen nach der Brechung nahe parallel

werden mufsten. Für diesen Punct ist der Winkel, unter welchem die Strahlen auf der ebenen Flintglasseite eintreten, fast drei Mal gröfser als derjenige, unter welchem sie nach der Brechung die innere convexe Seite der Tafelglaslinse verlassen. Befindet sich ein leuchtender Punct an dieser Stelle, so erscheint für ihn die Linse abweichungsfrei. Je näher er der Linse kommt, desto gröfser wird der Einfallswinkel, desto kleiner der Austrittswinkel, und beide nähern sich dem Verhältnisse der Gleichheit desto mehr, je weiter der leuchtende Punct gegen das Glas vorrückt, und die sphärische Abweichung der Concavlinse gewinnt das Übergewicht. Ist dieses Verhältnifs erreicht, und nähert sich der leuchtende Punct der Linse noch weiter, so wird der Austrittswinkel des Lichtes gröfser als der Einfallswinkel, das Übergewicht der sphärischen Abweichung der Hohllinse nimmt ab, bis endlich bei einem gewissen Verhältnisse jener zwei Winkel zu einander der Strahl die Doppellinse wieder abweichungsfrei verläfst. Demnach gibt es bei jeder achromatischen Linse mit einem plan-concaven Bestandtheil, und bei der sich die inneren Flächen mittelst des Kittes berühren, *zwei* Puncte in der Axe, für welche sie aplanatisch ist. Man kann diese Puncte füglich die *aplanatischen* Vereinigungspuncte nennen.

Bei einer achromatischen Linse, deren ein Theil wie vorhin convex, der andere convex-concav ist, und ersterer die concave Fläche zukehret, liegen diese zwei Puncte so, dafs weder die von dem einen noch die von dem anderen ausgehenden Strahlen nach der Brechung convergiren. Wurde an der vorhin besprochenen Linse mit plan-concavem Flintglase und convexem Tafelglase letzteres plan-convex gemacht, und beide Theile an der planen Fläche durch Kitt mit einander verbunden, so

lag der erste aplanatische Vereinigungspunct über $^2/_3$ weiter entfernt von der Linse als bei der ersteren Einrichtung derselben, der andere hingegen hatte nur die Hälfte der vorigen Entfernung. Überhaupt wird durch alles, was die gröſsere aplanatische Vereinigungsweite vergröſsert, die kleinere vermindert. Diese zwei Vereinigungsweiten stehen sich auch noch von einer anderen Seite gegenüber; die Randstrahlen, welche von einem auſser der Axe befindlichen Puncte herkommen, bewirken nämlich eine auſser der Mitte des Gesichtsfeldes liegende Undeutlichkeit, wenn man die längere, hingegen eine gegen die Mitte des Gesichtsfeldes hinfallende, wenn man die kürzere aplanatische Vereinigungsweite benützt.

Nun wird es begreiflich, wie man durch Verbindung zweier oder mehrerer achromatischer Linsen ein mikroskopisches Objectivglas zuwege bringen kann, wie man es wegen der groſsen Schwierigkeit, so kleine Linsen mit den gehörigen durch die Theorie vorgeschriebenen Krümmungen zu schleifen, durch eine einzige achromatische Linse nie erhalten kann. Man denke sich zwei achromatische Linsen *A* und *B* so neben einander stehend, daſs ihre Axen in eine und dieselbe gerade Linie fallen, und lasse auf die vorderste *B* von der kürzeren aplanatischen Vereinigungsweite einen Lichtstrahl auffallen. Dieser wird in derselben gebrochen, und kann leicht eine solche Richtung annehmen, daſs er das zweite Glas *A* in einer Richtung trifft, als käme er von der gröſseren aplanatischen Vereinigungsweite dieser Linse her. Ist diese Stellung der Linsen erreicht, so ist auch die Linse völlig aplanatisch. So wie man z. B. die Linse *A* näher an *B* brächte, würde die sphärische Abweichung nicht mehr aufgehoben seyn, sondern auf eine Weise eintreten, welche der bei einer einzigen Linse Statt

findenden entgegengesetzt ist, oder das Linsensystem wäre in Betreff der sphärischen Abweichung übercorrigirt. Das Gegentheil fände Statt, wenn die Linsen weiter von einander entfernt würden. Demnach kann man durch Ändern der gegenseitigen Entfernung der zwei Linsen in einem oder dem entgegengesetzten Sinne leicht ihre rechte Lage ausmitteln. Kleine Fehler im Achromatismus einer Linse lassen sich durch einen entgegengesetzten der anderen verbessern, so daſs man auf diese Weise nicht bloſs die centralen Strahlen vollkommen abweichungsfrei erhält, sondern auch die Randstrahlen, und so ein völlig reines und deutliches Gesichtsfeld erzielt.

Lister verspricht noch fernere Untersuchungen darüber anzustellen, ob sich nicht auch für Fernröhre ähnliche aplanatische Linsensysteme einrichten lassen, und ob man nicht vielleicht im Stande ist, durch dieses Mittel kürzere Fernröhre mit gröſserer Öffnung und derselben Vergröſserungskraft hervorzubringen.

3. Über *Wollaston's* Mikroskop. Von *Goring.*

(Quart. Journ. N. XIV., p. 248 e. s.)

Unter die wissenschaftlichen Gegenstände von *Wollaston's* Erfindung, die dieser groſse Geist noch auf seinem letzten Krankenlager der Welt mittheilte, gehört auch ein Mikroskop von besonderer Einrichtung. Es ist in den *Phil. Transact. for* 1829, *p.* 9 beschrieben, und dem deutschen Publikum bereits durch mehrere Zeitschriften (*Poggendorff's* Annalen, Bd. 16, S. 176, *Schweigger's* Jahrbuch, Bd. 60, S. 66) mitgetheilt worden. In dieser Zeitschrift war aus besonderen Gründen bis jetzt nicht davon die Rede. Zu der von *Wollaston* angegebenen Beschreibung liefert nun *Goring* einen Commentar, der manches Interessante und Wissens-

werthe enthält. Hier soll nun von *Wollaston's* Mikroskop und von der Beurtheilung desselben von Seite *Goring's* in Kürze die Rede seyn.

Wollaston's Verbesserung bezieht sich auf den Beleuchtungsapparat und auf die eigentlich mikroskopischen Linsen. Er behauptet, daſs alles Licht, welches ins Auge gelangt, ohne daſs es das Objectivglas zu gewältigen vermag, das deutliche Sehen mehr hindert als es dasselbe befördert. Darum leitet er das Licht mittelst eines Planspiegels in die Röhre des mikroskopischen Apparats, und bringt in derselben eine plan-convexe Linse von $^3/_4$ Z. Brennweite, mit der ebenen Fläche gegen das Object gekehrt, an, welche die Aufgabe hat, das Licht in der Ebene des Objectes in einen Punct zu sammeln. Zwischen dem Spiegel und der Sammellinse ist die Öffnung des mikroskopischen Rohres verengt oder eigentlich mit einem Diaphragma von 0.3 Z. versehen, deren von jener Linse in der Ebene des Objectes entworfenes Bild nur 0.05 Z. Durchmesser haben soll; eine Angabe, wornach sich leicht die Entfernung jenes Diaphragmas von der Linse ausmitteln läſst.

Der als Mikroskop wirkende Linsenapparat besteht aus zwei plan-convexen Linsen, die so gestellt sind, daſs ihre Axen in eine gerade Linie fallen, und den gehörigen, zur Erzielung der bestmöglichsten Wirkung nothwendigen Abstand von einander haben. Nach *Wollaston* ist diese Entfernung am zweckmäſsigsten, wenn sie 1.4 der kürzeren Brennweite der zwei Linsen beträgt; das vortheilhafteste Verhältniſs der Brennweiten selbst gibt er mit 3 : 1 an.

Goring's Bemerkungen über diese Einrichtung eines Mikroskopes beziehen sich zuerst auf den Beleuchtungsapparat. Er hält *Wollaston's* Behauptung, die er über diesen Punct aufstellt, für nicht allerseits richtig.

Es ist bekannt, sagt er, daſs die Abweichungen an allen optischen Instrumenten bei sehr hellen oder künstlich sehr stark beleuchteten Objecten am merklichsten sind. Ein Fernrohr, welches einen groſsen Stern nicht deutlich darzustellen vermag, zeigt einen schwachen als leuchtenden Tupf, und ein Reflector, welcher nicht im Stande ist, den Körper des Saturn wohl begrenzt darzustellen, kann doch das Licht eines entfernten Sternhaufens so gewältigen, daſs jeder Stern für sich erscheint, etc. Aus demselben Grunde zeigt ein Mikroskop, das bei einer schwachen Beleuchtung keine Spur einer Aberration merken läſst, dieselbe sehr stark, wenn es auf ein intensiv beleuchtetes Object gerichtet wird. (Vergleiche dieses mit der Behauptung *Lister's* auf S 479.) Dieses ist besonders der Fall, wenn man auf das Object verdichtetes Licht leitet. Das Licht der Atmosphäre ist in dem Falle, wo sich das Mikroskop geradezu gegen den Himmel kehren läſst, oder wenn man es durch ein künstliches Mittel auf das Object leiten kann, ohne Verdichtung für die meisten durchsichtigen Objecte hinreichend. Doch geht durch künstliche Zuleitungsmittel stets Licht verloren, und man muſs sich, um dem Bilde die nöthige Lichtstärke zu geben, eines Verdichtungsmittels, wie eines Hohlspiegels oder einer Convexlinse bedienen. Diese leisten dasselbe, was *Wollaston* von seinem Beleuchtungsapparate rühmt. Der Raum, in welchen dieses Licht vereinigt wird, ist gleichgültig, weil doch kein Mikroskop jene Strahlen ins Auge zu leiten vermag, welche nicht innerhalb eines gewissen Raumes ausgehen.

Bevor *Wollaston* seinen Vergröſserungsapparat beschreibt, behauptet er, daſs man den zusammengesetzten Mikroskopen mit achromatischen Objectiven nur den einen Vorzug einräumen könne, daſs sie wegen ihres

grofsen Gesichtsfeldes besonders geeignet seyen, bekannte Gegenstände zur Unterhaltung darzustellen; zur genauen Beobachtung neuer Gegenstände, wobei eine ganz besondere Deutlichkeit nothwendig ist, hält er sie nicht für geeignet, sondern zieht ihnen die einfachen Linsen vor.

Gegen diese Behauptung zieht nun *Goring* gar gewaltig zu Feld. Wenn, sagt er, ein zusammengesetztes Mikroskop, oder wie er es nennt, ein *Engyskop* geeignet ist, bekannte, schwer zu sehende Probeobjecte deutlich darzustellen, warum soll es dieses nicht mit unbekannten zu leisten im Stande seyn? Welches Object zeigt ein gutes achromatisches, dioptrisches oder *Amici's* catadioptrisches Mikroskop (?) nicht so gut als man es nur wünschen kann? Nur wenn man zeigen kann, dafs Objecte mit einfachen Linsen gesehen werden, die man mit *guten* zusammengesetzten Mikroskopen nicht eben so sieht, nur dann kann man mit Fug behaupten, dafs sie in Bezug auf unbekannte Objecte kein Zutrauen verdienen. Ja wenn man ein Object heut zu Tage mit jenen Instrumenten sieht, mit diesen aber nicht, so mufs man sich vor Irrthum sehr in Acht nehmen. Mit einfachen Linsen hat man in der That vieles entdeckt, mehr als mit alten zusammengesetzten Mikroskopen, bei denen man nur ein schwaches Auge und eine lebhafte Einbildungskraft braucht, um ohne Ende Neues zu sehen. Man hat behauptet, dafs man einen Gegenstand mit einem Fernrohr besser sicht, als unter demselben Gesichtswinkel mit freiem Auge. Ist dieses der Fall, warum sollen denn Engyskope nicht bessere Dienste thun als einfache Linsen? *W. Herschel* erzählt, sein Reflector zeige ihm vermöge seiner ungeheuren Lichtstärke und seiner durchdringenden Kraft die Uhr an einem fernen Kirchthurm bei so dunkler Nacht, dafs er sie mit freiem

Auge hart am Gebäude nicht hätte ausnehmen können. Es hat also der das Teleskop verlassende Lichtbüschel eine viel gröſsere Helligkeit, als jener, der in der deutlichen Sehweite ins Auge eindringt. *Goring* unterhielt sich oft damit, an einem hellen Tage ein 30—40 Fuſs entferntes Object mit einem guten Fernrohr, das ein mäſsig starkes Ocular hatte, und dann dasselbe in der Nähe unter demselben Gesichtswinkel mit Brillen anzusehen, und war erstaunt über die Ähnlichkeit der Bilder in beiden Fällen, und doch hat dieses Analogie mit dem Bilde in einem Mikroskope und einer einfachen Linse. Jeder Unbefangene wird zugeben müssen, wenn er diesen Versuch anstellt, daſs er mit dem Fernrohr so gut sieht wie mit den Brillen. Die Stärke der Vergrösserung, welche manche Fernröhre hervorbringen, ist oft sehr bedeutend. *Goring* sah ein *Gregorian*'sches Fernrohr von 4 Z. Brennweite und 2 Z. Öffnung, und ein anderes von 5 Z. Brennweite und 3 Z. Öffnung, und beide vertrugen eine 120malige Vergröſserung vollkommen gut. Bei der *Gregorian*'schen Einrichtung wird eigentlich das erste Bild durch ein reflectirendes Engyskop vergröſsert. Die vergröſsernde Kraft desselben entsprach der einer Linse von $^1/_{30}$ Z. Brennweite bei dem 4zölligen, und der einer Linse von $^1/_{20}$ Z. Brennweite bei dem anderen Teleskope. Ein siebenfüſsiger Newtonianer gestattete mit vollkommener Deutlichkeit eine 504malige Vergröſserung, und die Linse hatte $^1/_6$ Z. Brennweite. Es wäre zu wünschen, unsere achromatischen mikroskopischen Linsen vertrügen eine so starke Vergröſserung, wie die an kleinen Fernröhren, aber sie gestatten bei einer Länge des Mikroskopes von 6—9 Z. nur eine Brennweite von $^1/_4$ Z., wenn sie nicht an Deutlichkeit den einfachen Linsen nachstehen sollen. Je stärker das Objectivglas ist, eine desto geringere Ver-

gröſserung verträgt das Bild von Seite des Oculares. Die Engyskope, welche man (nach *Goring*) bis jetzt gemacht hat, haben ihre beste Wirkung bei einer Vergröſserung von 240, welche einer Linse von $^1/_{30}$ Z. Brennweite entspricht. Einfache Linsen von $^1/_{40}$, $^1/_{50}$, $^1/_{60}$ etc. Z. Brennweite übertreffen immer zusammengesetzte Mikroskope von gleicher Vergröſserungskraft an Güte.

Goring erinnert, schon in einem früheren Aufsatze ein Objectiv für Mikroskope angegeben zu haben, welches aus einer plan-convexen Linse, mit der ebenen Fläche gegen das Object gekehrt, besteht, in ihrem Focus ein Diaphragma hat, und unmittelbar hinter demselben eine andere Linse obiger Art so, daſs der Bau des Ganzen dem eines Oculars an einem achromatischen Fernrohre gleicht. Dieses Mikroskop ist nicht schwer zu verfertigen, kostet wenig, und kann füglich in Fällen gebraucht werden, wo einem keine aplanatische Linse zu Gebote steht. Mit zusammengesetzten Mikroskopen der alten Art sieht man immerhin durchsichtige Objecte gut genug, falls die Objectivlinse eine Brennweite hat von $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_{15}$ bis $^1/_{20}$ Z.; nur wenn die Kraft des Objectives durch den Ocularaufsatz auf das Vierfache getrieben wird, zeigt ein solches Instrument schlechter als eine einfache Linse, jedoch man sieht auch durch ein solches noch etwas, und das ist für Manchen genug; aber auch das beste leistet schlechte Dienste, wenn man es nicht gehörig zu behandeln weiſs.

Wollaston gibt den Linsen seines Mikroskops bekanntlich eine plan-convexe Gestalt, und meint, eine Linse aus Glas mit Vortheil durch eine eben so gestaltete Saphirlinse ersetzen zu können. In Betreff dieses Punctes bemerkt *Goring* folgendes: *Herschel* hat in seiner Abhandlung über das Licht den Grund angegeben, warum eine plan-convexe Linse aus Saphir oder einem

anderen Stoffe von demselben Brechungsvermögen am besten geeignet ist, parallele Strahlen in einen Focus zu sammeln, sobald man ihre convexe Fläche den einfallenden Strahlen zukehrt. Diese ist daher auch am geeignetsten, divergirende Strahlen in einen Punct zu sammeln.

Dieselben Gründe müssen demnach auch bei einer Vergleichung einer Saphirlinse mit einer Demantlinse zu Gunsten der letzteren sprechen. Kein Körper ist von der Natur in so mannigfaltigen Gestalten gebildet worden, als der Diamant. Unter diesen sind aber einige zu Linsen nicht geeignet, weil sie zwei Axen der Polarisation besitzen, andere hingegen zeigen keine Spur einer doppelten Brechung, und taugen zu Linsen sehr wohl; man kann aber auch einige mit doppelter Brechung zu Linsen besser als doppelt brechende Saphire verwenden, indem man die Axe der Linse mit der Brechungsaxe zusammenfallen läſst. Bis jetzt hat man noch nicht ausmitteln können, ob Diamanten von gewissen Krystallisationsgestalten zu Linsen besser taugen als andere. Kann man deren ohne Risse, ohne krystallinische Textur und ohne doppelte Brechung erhalten, so dürften sie allen anderen Substanzen zu kleinen Linsen vorzuziehen seyn, weil sie so frei von jeder Farbe sind, und ein im Verhältniſs zum Zerstreuungsvermögen so hohes Brechungsvermögen besitzen.

Der Granat verliert in so kleinen Stücken, wie eine mikroskopische Linse fordert, seine dunkelrothe Farbe, hat keine doppelte Brechung, und sein Brechungsvermögen hält das Mittel zwischen dem des Saphirs und des Diamantes, während sein Zerstreuungsvermögen nur wenig gröſser ist als das des Glases. *Brewster* fand die aus diesem Edelsteine verfertigten Linsen besser als die von Saphir. *Wollaston* hat nie eine Granatlinse gesehen,

und sich sogar geweigert, eine ihm von *Pritchard* dargebotene Diamantlinse zu untersuchen. (Vielleicht, weil er es für unmöglich hielt, ihr eine genau sphärische Gestalt zu geben, worin er nicht ganz Unrecht haben mag, wie mich eigene Erfahrungen belehren. *B.*) Es ist übrigens nicht so leicht, gute Saphirlinsen zu erhalten, denn dieser Stein hat oft Sprünge, eine krystallinische Textur, ungleich feste Theile, etc. Wird ein Saphir senkrecht auf die Axe in drei gleiche Theile zerschnitten, so kann das Mittelstück eine sehr schlechte Linse geben, während die Linsen aus den anderen Stücken vortrefflich ausfallen. Man kann dieses *a priori* nicht unterscheiden, und kennt es erst, wenn der Stein polirt ist oder man geradezu die Linse fertig macht, wie dieses *Pritchard* immer thut. Die härtesten Steine geben die besten Linsen. Den höheren Preis, den Saphir- oder andere Edelsteinlinsen im Verhältniſs zu Glaslinsen kosten, und der in *Wollaston's* Augen wohl von Belang ist, wenn man mit einer geschickten Verbindung von Glaslinsen dasselbe leistet, was eine Edelsteinlinse thut, sieht *Goring* als einen kaum berücksichtigungswerthen Gegenstand an, und meint, ein Gentleman und ein Mann von Wissenschaft dürfe sich um so etwas gar nicht bekümmern.

Bei *Wollaston's* Mikroskop ist nach der Angabe des Erfinders die Entfernung der zwei plan-convexen Linsen von einander eine Sache, die genau bestimmt seyn muſs, und es ist vorhin gesagt worden, welche Gröſse *Wollaston* dieser Entfernung gibt. Diese Angabe hält aber *Goring* für völlig unrichtig, weil sie nicht die kleinste sphärische Abweichung gewährt. Er gibt eine Tafel an, welche die Brennweiten der zwei Linsen und jene Entfernung derselben von einander enthält, die für

solche Mikroskope am zweckmäſsigsten ist. Sie folgt hier. $^1/_{100}$ Z. stellt hier die Einheit vor.

Linse I.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Linse II.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Entfernung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Multiplicirt man die Brennweiten beider zusammengehörigen Linsen mit einander, und dividirt das Product durch ihre Summe um ihre Distanz vermindert, so erhält man als Quotienten die Brennweite einer Linse, die mit dem betrachteten Paare einerlei vergröſsernde Kraft hat. Ihre sphärische Abweichung beträgt nur $^5/_{12}$ von der einer gleichschenkeligen Linse von gleicher Kraft und Öffnung. Solche Linsenverbindungen haben zwar eine sehr geringe sphärische Abweichung — sie beträgt nur $^1/_4$ von der, welcher eine gleichviel leistende gleichschenkelige Convexlinse unterliegt — doch haben sie die üble Eigenschaft, daſs, wenn sich ihre Bestandtheile nicht unmittelbar berühren, das Object so nahe an die erstere derselben gestellt werden muſs, daſs man damit schon bei einer nur mäſsigen Vergröſserung kein undurchsichtiges, und bei einer groſsen selbst kein unter Glas befindliches durchsichtiges Object ansehen kann; mit *Wollaston's* Instrument darf ein solches Object höchstens nur von einem dünnen Glimmerplättchen bedeckt seyn.

Herschel hat in einer gelehrten Abhandlung, welche in den *Transact.* für das Jahr 1821 enthalten ist, gezeigt, wie man zwei Convexlinsen am vortheilhaftesten mit einander verbinden kann. Er wählt zwei plan-convexe Linsen, deren Brennweiten im Verhältnisse 1 : 2.3 stehen, die sich mit ihren convexen Flächen berühren, und wovon die schwächere gegen das Auge gekehrt ist. Dadurch erhält er einen Apparat, deren sphärische Abweichung geringer ist, als der vierte Theil jener *einer* Linse

von der vortheilhaftesten Gestalt. Ja derselbe Gelehrte zeigt, dafs zwei Menisken unter gewissen Umständen ganz ohne Abweichung in der Axe seyn können. Da diese Linsen sich berühren, so ist das daraus bestehende Mikroskop leichter fertig gemacht, weil man sich nicht erst bemühen darf, die rechte Entfernung der Linsen von einander zu treffen. Es bedarf daher keiner Versuche mehr, wie *Wollaston* meint, um die beste Einrichtung solcher aus zwei nahe an einander stehenden Linsen bestehender Mikroskope zu finden, da sie bereits durch Rechnung ausgemittelt ist. Die Richtigkeit der Rechnungsresultate hat sich aber auch durch die Erfahrung sattsam bewährt. *Goring* hat schon vor mehreren Jahren ein Mikroskop nach *Herschel's* Rechnung verfertigen lassen, und sich überzeugt, dafs dasselbe eine sehr grofse Deutlichkeit besafs, und auf Objecten Furchen zeigte, die man mit einer so geringen Vergröfserung sonst gar nicht zu sehen gewohnt ist. Der Linsenapparat hatte eine Brennweite von $^1/_6$ Z., und war so gut, dafs er eine aus drei Stücken bestehende aplanatische Linse von $^1/_5$ Z. Brennweite übertraf.

Hierin besteht nun das Wichtigste von *Goring's* Bemerkungen über *Wollaston's* Mikroskop, die nicht etwa, um den Verdiensten des grofsen Verstorbenen ihre Krone zu entreifsen, sondern blofs darum aufgenommen wurden, weil es für den Unparteyischen interessant ist, abweichende Meinungen über denselben Gegenstand kennen zu lernen, besonders wenn sie von Gelehrten herrühren, die in dem Gegenstande, worüber sie sprechen, sich eine Art Recht erworben haben, gehört zu werden,

4. Über die partielle Polarisation des Lichtes durch Reflexion. Von *D. Brewster.*

(Phil transact. 1830. *P. I., p.* 69*)*

Wenn ein Lichtstrahl auf einen Körper auffällt unter einem Winkel, welcher von dem der vollkommenen Polarisation abweicht, so wird er nur zum Theil polarisirt, soll aber durch mehrere auf einander folgende Reflexionen oder Brechungen unter demselben Winkel vollkommen polarisirt werden können. *Brewster* hat schon früher für jeden Winkel die Anzahl der Reflexionen angegeben, welcher zur Erzielung der totalen Polarisation nothwendig ist. Da entsteht nun die Frage: Sind bei dieser theilweisen Polarisation des Lichtstrahles einige Theile desselben vollkommen polarisirt, die anderen aber in ihrem natürlichen Zustande verblieben, oder haben auch letztere eine Modification erlitten, welcher gemäſs sie der vollkommenen Polarisation mit jeder neuen Reflexion näher gebracht werden? Darüber können bekanntlich nur Versuche entscheiden, und von solchen ist hier die Rede.

Man denke sich einen Lichtstrahl durch doppelte Brechung in zwei Theile *A* und *B* zerlegt, welche entgegengesetzte Polarisationszustände besitzen, und lasse sie hinter einander unter verschiedenen Winkeln auf eine Glasplatte auffallen, so daſs sie in einer Ebene reflectirt werden, welche gegen die Polarisationsebenen der zwei Strahlen um 45° geneigt ist, fange endlich die Strahlen nach der Reflexion mit einem Kalkspathrhomboëder auf, dessen Hauptschnitt in der Reflexionsebene liegt, und untersuche durch denselben den Polarisationszustand der Strahlen nach der Reflexion. Da lehrt nun die Erfahrung Folgendes: Bei einem Einfalle unter 90° (vom Loth an gerechnet) bleiben die zwei Strahlen selbst nach der Reflexion noch unter einem rechten Winkel polarisirt, denn die vier Bilder, welche da zum Vorschein kommen, haben eine gleiche Intensität. So wie der Einfallswinkel abnimmt, verschwindet jene Gleichheit der Bilder. Bei 80° machen die Polarisationsrichtungen der zwei Strahlen nur 60°, bei 70° nur 40°, und bei 56° 45′ haben sie einerlei Polarisationszustand. Unter diesem Winkel weichen die Polarisationsrichtungen

wieder von einander ab, bei 50° schliefsen sie 22°, bei 40° hingegen 50°, und bei 0° gar 90° ein, oder sie sind wieder unter einem rechten Winkel polarisirt. Wurde statt Glas ein Diamant genommen, so war schon bei einem Einfallswinkel von 80° die Neigung der Polarisationsrichtung beider Strahlen 46°, bei 8° hingegen 70°, und bei 67° 43′ endlich = 0, oder die beiden Strahlen erscheinen wieder unter einerlei Polarisationsrichtung.

Denkt man sich nun beide Strahlen *A* und *B*, welche bisher jeder für sich betrachtet worden sind, zu einem einzigen Strahl vereinigt, so hat dieser offenbar den Charakter eines natürlichen Strahls; denn wenn ein natürlicher, unpolarisirter Strahl in einem doppelt brechenden Krystall in zwei, unter einem rechten Winkel polarisirte Theile zerlegt wird, so müssen ja zwei solche Theile mit einander vereint wieder einen natürlichen Strahl geben. Ein solcher Strahl erleidet bekanntlich keine Veränderung, wenn er von einem Körper, wie die vorhin betrachtete Glastafel war, unter 90° reflectirt wird, unter dem Winkel der vollkommenen Polarisation hingegen wird er ganz polarisirt, d. h. die Polarisationsaxe des einen Theils wird um 45° rechts, die des andern um 45° links gewendet, so dafs sie beide zusammenfallen. Bestünde demnach ein unvollkommen polarisirter Strahl aus einem Antheil unpolarisirten Lichtes, so müfsten seine Theile unter einem rechten Winkel polarisirt seyn. Dieses ist aber nicht der Fall, sondern die Polarisationsaxen seiner Theile machen dem Vorhergehenden gemäfs einen Winkel, welcher von der Gröfse des Winkels, unter welchem sie die partielle Polarisation erlitten haben, und von der Natur der Substanz, die sie polarisirt hat, abhängt. So z. B. besteht der unter 80° vom Glas reflectirte Strahl aus Theilen, deren Polarisationsaxen einen Winkel von 66°, der unter demselben Winkel vom Diamant polarisirte aus Theilen, deren Polarisationsaxen einen Winkel von 46° einschliessen. Bezeichnet man den Winkel, unter welchem die zwei Polarisationsaxen der in einem unvollkommen polarisirten Strahl enthaltenen Theile gegen einander geneigt sind, allgemein mit 2φ, so ist $A \cos.^2 \varphi$ die Intensität des einen, und $A \sin.^2 \varphi$ die Intensität des anderen Theils von *A*, wenn dieser Strahl durch den oben ge-

nannten Doppelspath geleitet worden ist. Dasselbe gilt von den Theilen des Strahles *B*, und daher auch von dem Strahl, welcher aus der Vereinigung der Strahlen *A* und *B* hervorgeht; man kann demnach sagen: Wenn ein Strahl von Glas unter 80° reflectirt wird, und der reflectirte Antheil durch einen Doppelspath geht, dessen Hauptschnitt in der Reflexionsebene liegt, so ist das gewöhnliche Bild in dem Verhältnisse $\cos.^2 33^0 : \sin.^2 33^0$ heller als das ungewöhnliche. Dasselbe Verhältnifs hätte man gefunden, wenn man den unvollkommen polarisirten Strahl aus zwei Theilen bestehend betrachtet hätte, aus einem vollkommen polarisirten und aus einem andern im natürlichen Zustande befindlichen, und dieser Umstand mag daran Schuld seyn, dafs man letzteres für den wahren Zustand hielt.

Von grofsem Belange ist es, den Werth von φ für jede Substanz und für jeden Einfallswinkel des Lichtes zu kennen, weil man dann im Stande ist, die Intensität des polarisirten Strahlenbüschels zu bestimmen, von welcher Natur der reflectirende Körper immer seyn mag, unter welchem Winkel der Strahl auffällt, und wie viele Reflexionen er erlitten hat. *Fresnel* hat eine Formel aufgestellt, welche so lautet:

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,x\,\frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.\,(i-i')},$$

oder für $x = 45^0$

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.\,(i-i')},$$

wo i der Einfallswinkel, i' der Brechungswinkel, x die ursprüngliche Neigung der Polarisationsebene zur Reflexionsebene, und φ die Neigung der neuen Polarisationsebene zur letzteren bedeutet. Die Formel zeigt sich als der Wahrheit vollkommen entsprechend, wie die Vergleichung ihrer Ergebnisse mit denen der Erfahrung schliefsen läfst, welche folgende Tabelle zeigt, bei der $x = 45^0$ ist.

i	i'	φ beobachtet.	φ berechnet.	Differenz.
90°	0° 0′	45° 0′	45° 0′	0° 0′
88	42 23	43 4	42 49	+ 0 35
86	42 17	40 43	40 36	+ 0 7
84	42 8	38 47	38 22	+ 0 25
80	41 37	33 13	33 46	— 0 33
75	40 40	28 45	27 41	+ 1 4
70	39 20	22 6	21 3	+ 1 3
65	37 41	14 40	13 53	+ 0 47
60	35 45	6 10	6 16	— 0 6
56	34 0	0 0	0 0	0 0
50	31 22	9 0	9 0	0 0
45	28 29	16 55	16 31	+ 0 24
40	25 42	22 37	23 1	— 0 24
30	19 43	32 25	33 19	— 0 54
20	13 20	39 0	40 4	— 1 4
10	6 44	44 0	43 49	+ 0 11

Die Differenzen liegen durchaus innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Beobachtungsfehler. Es ist merkwürdig, daſs bei jeder Substanz, wenn $i = 45°$, die Ablenkung oder der Werth von $i - i'$ das Complement des Brechungswinkels i' zu 45° ist, und daſs die Veränderung der Polarisationsebene eines unter $+45°$ oder $-45°$ polarisirten Strahles dem Brechungswinkel gleicht, während $\varphi = i - i'$ ist.

Die Versuche, deren Resultate die vorhergehende Tabelle enthält, wurden mit Glas angestellt, wo der Brechungsindex 1.4826 war. Die folgende bezieht sich auf Diamant mit dem Brechungsindex 2.440.

i	i'	φ beobachtet.	φ berechnet.	Differenz.
90° 0′	24° 12′	45° 0′	45° 0′	0° 0′
85 0	24 6	34 30	33 56	+ 0 34
80 0	23 48	24 0	23 12	+ 0 48
75 0	23 19	14 30	13 8	+ 1 22
70 0	22 39	4 30	3 54	+ 0 36
67 43	22 17	0 0	0 0	0 0
60 0	20 47	12 30	11 41	+ 0 49
50 0	18 18	24 0	23 30	+ 0 30

Um auch bei verschiedenen Werthen von x die Formel mit den Ergebnissen der Erfahrung zu vergleichen, wurde ein Quarzkrystall genommen, dessen mit

der Axe parallele Flächen sehr rein waren, und für welchen vorläufig bei $i = 75°$ und $x = 45°$ der Winkel $\varphi = 26° 27'$ gefunden wurde. Es wurde nun x successive geändert, φ nach der Formel

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,(26° 27')\,\text{tang}\,x$$

berechnet, und mit dem Werthe, wie ihn die Erfahrung für diese Gröſse gab, verglichen, und da ergaben sich folgende Resultate:

x	φ beobachtet.	φ berechnet.	Differenz
0°	0° 0′	0° 0′	0° 0′
10	4 54	4 29	+ 0 25
20	10 0	10 16	— 0 16
30	15 50	16 2	— 0 12
35	20 0	19 12	+ 0 48
40	23 30	22 40	+ 0 50
45	26 20	26 27	— 0 7
50	30 0	30 40	— 0 40
55	35 30	35 23	+ 0 7
60	40 0	40 45	— 0 45
70	53 0	53 49	— 0 49
80	70 0	70 29	— 0 29
90	90 0	90 0	0 0

Die obige Formel kann daher als Ausdruck des Naturgesetzes für eine einzige Reflexion angesehen werden.

Man denke sich nun einen natürlichen, unpolarisirten Strahl aus den zwei unter einem rechten Winkel polarisirten Hälften A und B zusammengesetzt, lasse ihn auf eine Glasplatte so auffallen, daſs der reflectirte Strahl aus den zwei Theilen C und D besteht, deren Polarisationsrichtungen den Winkel 2φ einschlieſsen, und daher gegen eine diesen Winkel halbirende Ebene M um die Winkel $+\varphi$ und $-\varphi$ geneigt sind. Hat nun ein Doppelspath seinen Hauptschnitt in M, so theilt er den Strahl C in die Theile E und F, und den Strahl D in die Theile G und H. E und H sind die gewöhnlichen, F und G die gewöhnlich gebrochenen Antheile. Heiſst man $C + D = 1$, so ist $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$, $E + F = 1$ und $G + H = 1$; ferner ist $C = \frac{1}{2}\,\text{sin.}^2\,\varphi$, $F = \frac{1}{2}\,\text{cos.}^2\,\varphi$, und $\frac{1}{2}\,\text{sin.}^2\,\varphi - \frac{1}{2}\,\text{cos.}^2\,\varphi$ ist die Lichtmenge, welche vom ungewöhnlichen Bilde C ins gewöhnliche F übergeht, oder scheinbar in der Ebene M polarisirt ist. Da dasselbe

auch von D gilt, so haben wir

$$2\left(\tfrac{1}{2}\sin.^2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos.^2\varphi\right) = \sin^2\varphi - \cos.^2\varphi = C + D,$$

und daher für die ganze Menge Q des polarisirten Lichtes

$$Q = 1 - 2\sin.^2\varphi;$$

$$\text{aber}\quad \text{tang.}\,\varphi = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \text{tang.}\,x\,\frac{\cos.(i+i')}{\cos(i-i')},$$

$$\text{mithin}\quad \sin.^2\varphi = \frac{\left(\text{tang.}\,x\,\frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')}\right)^2}{1+\left(\text{tang.}\,x\,\frac{\cos.i+i'}{\cos.i-i'}\right)^2}$$

$$\text{und}\quad Q = 1 - 2\,\frac{\left(\text{tang.}\,x\,\frac{\cos.(i+i')}{\cos(i-i')}\right)^2}{1+\left(\text{tang.}\,x\,\frac{\cos.i+i'}{\cos.i-i'}\right)^2}.$$

Verbindet man diesen Ausdruck, welchem die reflectirte Lichtmenge $= 1$ zum Grunde liegt, mit dem *Fresnel*'schen für die Intensität des reflectirten Lichtes; so wird, in der Voraussetzung, daſs man tang. $x = 1$ nimmt, für Q in Bezug auf das einfallende Licht

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin.^2(i+i')}{\sin.^2(i-i')} + \frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')}\right) \times$$

$$\times\left(1 - 2\,\frac{\left(\frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')}\right)^2}{1+\left(\frac{\cos(i+i')}{\cos.(i-i')}\right)^2}\right).$$

Nach *Fresnel* besteht der reflectirte Strahl aus einem Theil a, der vollkommen in einer Ebene polarisirt ist, welche mit der Einfallsebene den Winkel x einschlieſst, und aus dem unveränderten Theile $1-a$. Darnach wird

$$I = \frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}\cdot\frac{1+a\sin.^2 x}{2} + \frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')}\cdot\frac{1-a\cos.^2 x}{2}.$$

Da aber aus dem Vorhergehenden klar ist, daſs ein unvollkommen polarisirter Strahl aus Theilen besteht, deren Polarisationsebenen den Winkel x einschlieſsen, so erhalten wir

$$I = \frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}\cos.^2 x + \frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')}\sin.^2 x,$$

und daher

$$Q = \left(\frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}\cos.^2 x + \frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')}\sin.^2 x\right) \times$$

$$\times \left(1 - 2\,\frac{\left(\text{tang.}\,x\,\frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.\,(i-i')}\right)^2}{1 + \left(\text{tang.}\,x\,\frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.\,(i-i')}\right)^2}\right),$$

Folgende Tafel zeigt, wie viel Licht von Glas, dem der Brechungsindex $m = 1.525$ entspricht, unter verschiedenen Einfallswinkeln reflectirt wird. Die auffallende Lichtmenge wird $= 1000$ gesetzt.

i		i'		φ		Reflectirte Lichtmenge R	Q	$Q : R$
0°	0′	0°	0′	45°	0′	43.23	0	0
10	0	6	32	43	51	43.39	1.74	0.04000
20	0	12	58	40	13	43.41	7.22	0.16618
25	0	16	5	37	21	43.64	11.6	0.26388
30	0	19	8.5	33	40	44.78	17.25	0.3853
35	0	22	6	29	8	46.33	24.37	0.5260
40	0	24	56	23	41	49.10	33.25	0.6773
45	0	27	37.5	17	22.5	53.66	44.09	0.82167
50	0	30	9	10	18	61 36	57.36	0.9360
56	45	33	15	0	0	79.5	79.5	1.000
60	0	34	36	5	4.5	93.31	91.6	0 9628
65	0	36	28	12	45	124.86	112.7	0.90258
70	0	38	2	18	32	162.67	129.80	0.79794
75	0	39	18	26	52	257.26	152.34	0.59154
78	0	39	54	30	44	329.95	157.67	0.47786
79	0	40	4	31	59	359.27	157.69	0.43892
80	0	40	13	33	13	391.7	156.6	0.40000
82	44	40	35	36	22	499.44	145.4	0.29112
84	0	40	42	38	2	560 32	134.93	0.2408
85	0	40	47	39	12	616.28	123.75	0.2008
86	0	40	51	40	22.7	676.26	108.67	0.16068
87	0	40	54	41	32	744.11	89 83	0.12072
88	0	40	57.5	42	42	819.9	65.9	0.0804
89	0	40	58	43	51	904.81	36 32	0.04014
90	0	40	58	45	0	1000	0	0.0000

Es mangeln uns durchaus die Erfahrungen zur Prüfung dieser Formel; nur dieſs gibt ein kleines Prüfungs-

mittel an die Hand, was *Arago* über die Winkel versucht hat, unter welchen Glas und Wasser gleich viel Licht polarisiren, und eine daraus abgeleitete Vergleichung obiger Formel mit diesen Erfahrungen spricht ganz zu Gunsten der ersteren, wie man aus Folgendem ersieht:

	i		φ		$\frac{Q}{R}$
Glas Nro. 1. . . .	82°	48′	37°	33′	0.2572
	24	18	37	21	0.2637
Glas Nro. 2. . . .	82	5	36	47	0.2828
	26	6	36	0	0.3090
Glas Nro. 3. . . .	78	20	32	38	0.4186
	29	42	33	1	0.4064
Wasser	86	31	41	54	0.1080
	16	12	41	27	0.1236

Die Abweichung der Resultate der Formel von denen der Erfahrung beträgt bei Glas Nro. 1. 0.0065 oder $^1/_{154}$tel der ganzen Lichtmenge, bei Glas Nro. 2. und 3. 0.0262 und 0.0122 oder $^1/_{38}$tel und $^1/_{82}$tel, bei Wasser endlich 0.0156 oder $^1/_{64}$tel des ganzen Lichtes, so daſs man wohl annehmen kann, obige Formel drücke das wahre Naturgesetz nahe genug aus. Nach *Arago* sollte unter Winkeln, die vom Polarisationswinkel um gleich viel abweichen, gleich viel Licht polarisirt werden; dieses findet aber nach der Formel nicht Statt, und man kann *Arago's* Ausspruch für nicht völlig streng wahr annehmen.

Wird ein unpolarisirter Lichtstrahl von einem durchsichtigen Körper unter 61° 3′ reflectirt und so geändert, daſs seine Polarisationsaxen 6° 45′ mit der Reflexionsebene machen; so hat man, falls er nun auf einen zweiten ähnlichen Körper auffällt, $x = 6° 45'$, und man kann den Erfolg der zweiten Reflexion nach der Formel

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,x \left(\frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.\,(i-i')}\right)$$

berechnen. Da aber für jede Anzahl von Reflexionen das Verhältniſs $x : \varphi$ dasselbe bleibt, so hat man nach n Reflexionen für die Neigung ϑ der Polarisationsaxen gegen die Reflexionsebene den Ausdruck

$$\text{tang.}\,\vartheta = \text{tang.}^n\,\varphi = \left(\frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.\,(i-i')}\right)^n$$

Da ein Strahl durch keine Anzahl Reflexionen unter einem vom Polarisationswinkel abweichenden Winkel vollkommen polarisirt werden kann, so kann auch ϑ nie $= 0$ seyn; man kann aber die Polarisation als vollkommen ansehen, wenn ϑ von 0 nicht stark abweicht. Dieses ist z. B. nach zwei Reflexionen von Glas unter 61° 3′ oder unter 60° 28′ der Fall, weil im ersten ϑ nach zwei Reflexionen $= 0° 47'$, im zweiten aber $= 0° 33'$ ist, woraus sich die Menge des unpolarisirten Lichtes $= 0.00037$ und 0.00018 ergibt. Eben so läſst sich annehmen, daſs ein Strahl nach fünf Reflexionen unter 70° vollkommen polarisirt sey, weil die unpolarisirte Lichtmenge nur 0.00008 beträgt. Erfolgen die Reflexionen unter verschiedenen Winkeln, so wird

$$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')} \cdot \frac{\cos.(I+I')}{\cos.(I-I')},$$

wo I und i die Einfallswinkel bezeichnen. Sind demnach für jede einzelne Reflexion die Werthe von φ oder ϑ, a, b, c, d, e etc, so hat man am Ende

$$\text{tang.}\,\vartheta = \text{tang.}\,a \,.\, \text{tang.}\,b \,.\, \text{tang.}\,c \,.\, \text{tang.}\,d \text{ etc.}$$

Es ist klar, daſs die Menge des polarisirten Lichtes oder Q für verschiedenfarbiges Licht verschiedene Werthe hat, weil diese Gröſse von i', d. h. vom Brechungswinkel abhängt. Von diesem Umstande rührt es her, daſs das unpolarisirte Licht, welches im ungewöhnlichen Bilde zurückbleibt, und auch das Licht, welches das gewöhnliche Bild gibt, bei Körpern von groſsem Zerstreuungsvermögen gefärbt erscheint. Es gibt demnach nie für alle Theile des weiſsen Lichtes zugleich eine vollkommene Polarisation. Obige Formeln lassen sich auch gut brauchen, wenn eine oder die andere der Reflexionen, wodurch eine partielle Polarisation erzeugt wird, an der zweiten Grenzfläche des reflectirenden Körpers vor sich geht. Heiſst φ' das für die zweite Fläche, was vorhin φ für die erste bedeutet hat, m der Brechungsindex für den durchsichtigen reflectirenden Körper, so ist $\varphi' : \varphi = 1 : m$, und man kann demnach Q für diesen Fall bestimmen.

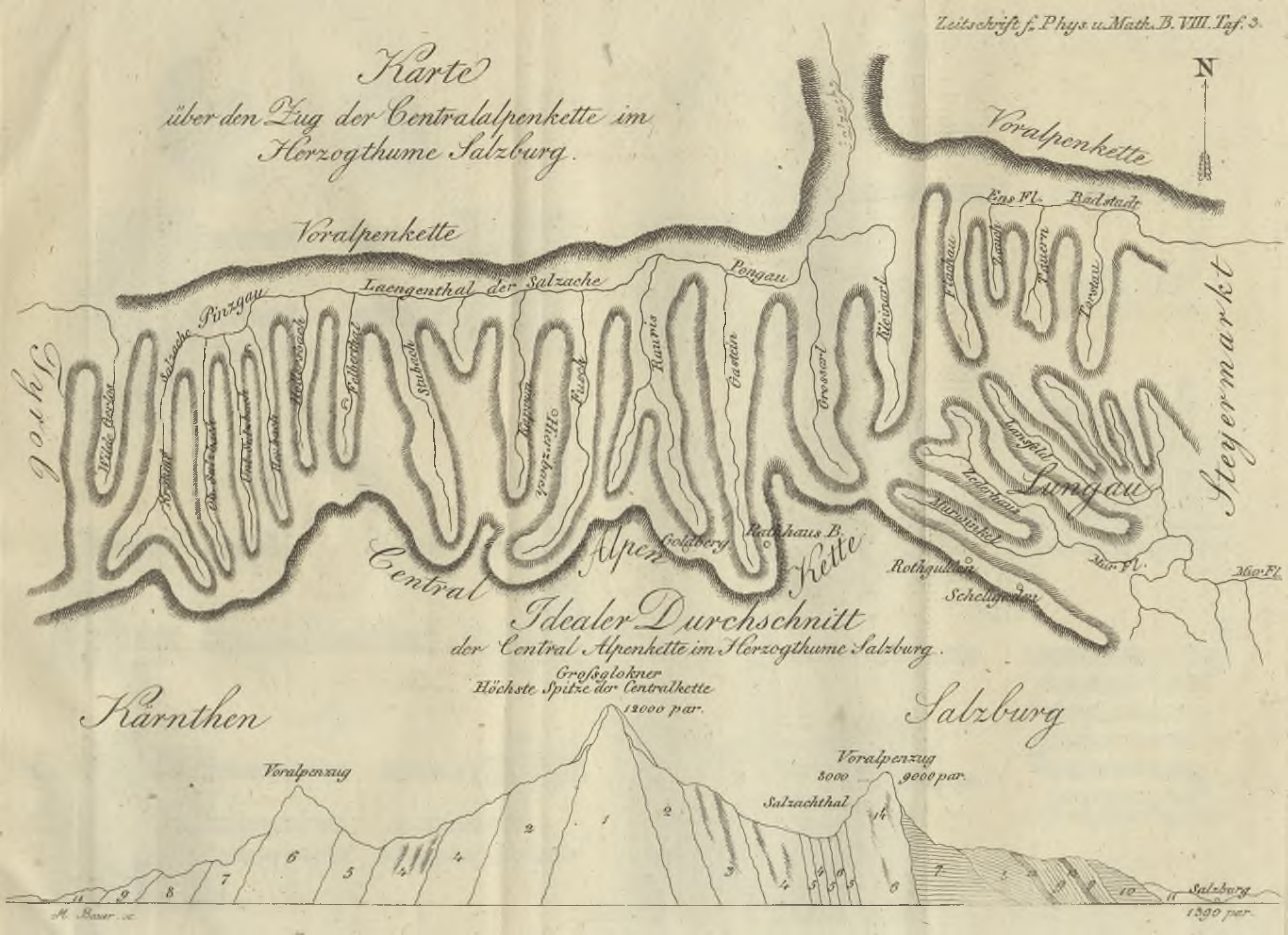
Wenn man dem bisher Abgehandelten gemäſs einen polarisirten Strahl als solchen betrachtet, dessen alle

Polarisationsrichtungen parallel sind, so kann das Licht nie durch irgend eine Anzahl von Reflexionen vollkommen polarisirt werden, wenn es nicht unter dem Winkel der vollkommenen Polarisation auffällt. Wenn solches Licht auch bei der Prüfung mit einem Doppelspath als vollkommen polarisirt erscheint, so ist es doch nicht so, sondern unterscheidet sich vom vollkommen polarisirten durch den Winkel, den seine Polarisationsaxen mit einander machen. Es ist demnach ein Doppelspath kein sicheres Mittel, um vollkommen polarisirtes Licht von jenem zu unterscheiden, das sich der vollkommenen Polarisation nähert. Vielleicht werden Interferenzphänomene das Licht in diesen beiden Zuständen schärfer unterscheiden.

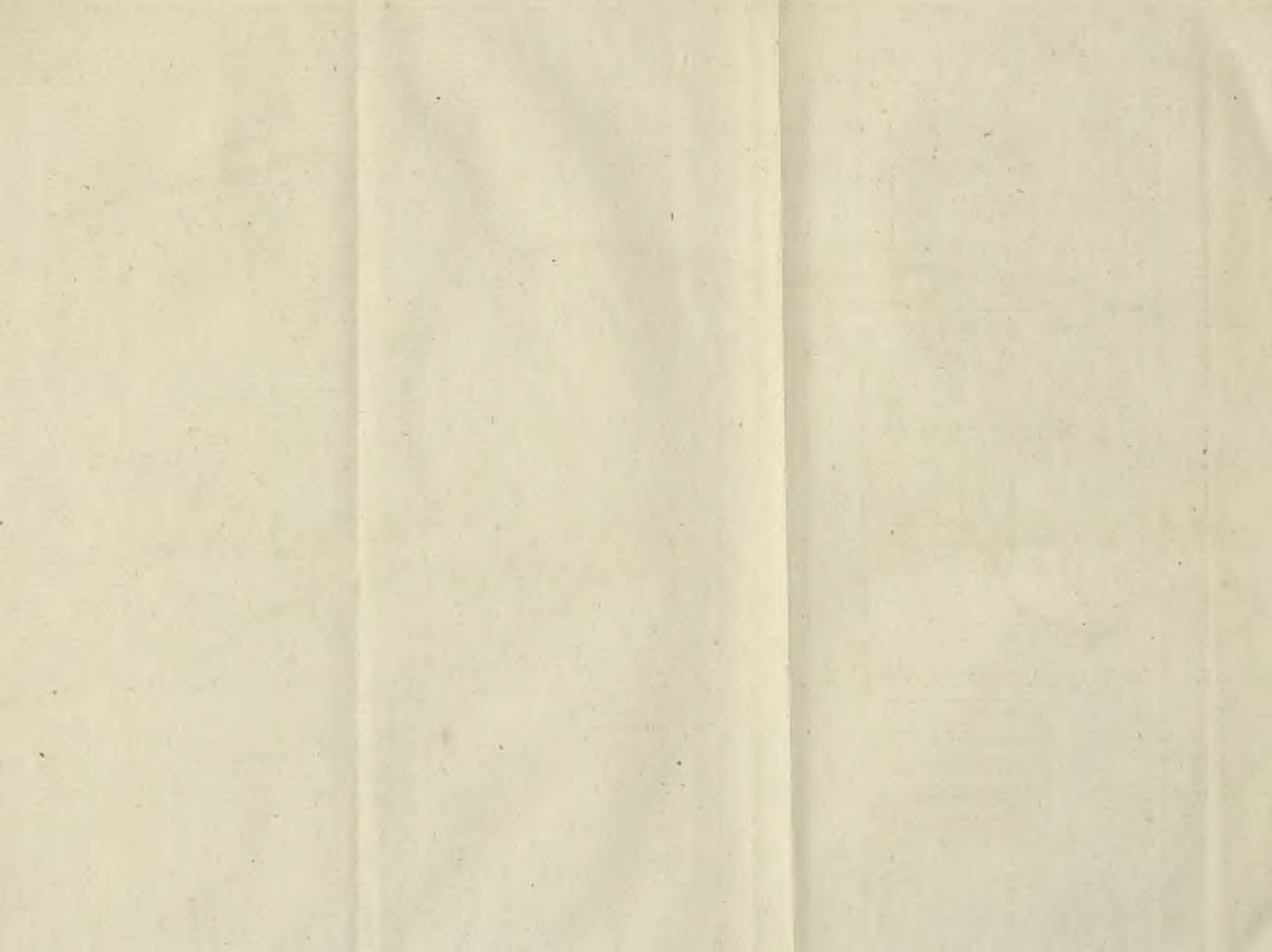
Meteorologische Beobachtungen. August 1830.

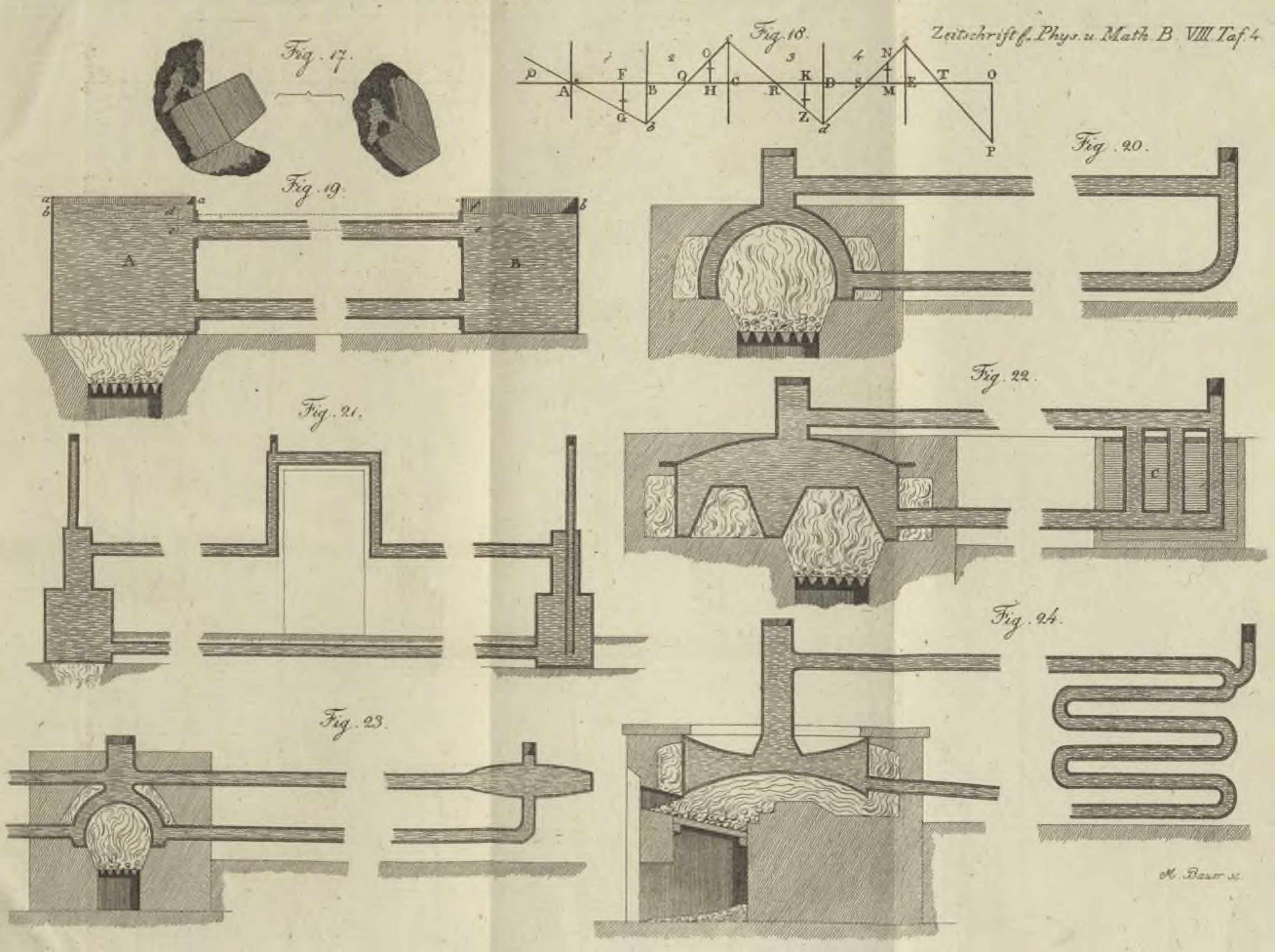
Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh. Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Um 3 Uhr Nachmittag. Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Um 10 Uhr Abends. Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Witterung.
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		
1	27.574	18.0	NSW. schw.	27.548	26.0	WSW. schw.	27.554	21.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
2	27.559	19.0	SO. schwach.	27.507	25.8	OSO. stark.	27.525	21.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
3	27.613	21.0	NNO. still.	27.558	27.0	OSO. mitt.	27.545	21.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolk., Gew.
4	27.692	17.0	WNW. schw.	27.658	24.0	NNO. still.	27.639	20.0	NO. schwach.	Sonne mit Wolken.
5	27.628	19.3	S. still.	27.523	28.0	OSO. mitt.	27.515	22.0	SO. schwach.	Heiter.
6	27.486	21.0	WNW schw.	27.454	23.0	WSW. schw.	27.394	20.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.389	16.8	W. schwach.	27.398	15.0	WNW. schw.	27.444	10.0	WNW. schw.	Morg. Reg. Sonne m.W.
8	27.411	11.5	WNW. schw.	27.321	15.0	WNW. schw.	27.301	12.0	WNW. schw.	Morg. Reg. Sonne m.W.
9	27.315	12.0	WNW. schw.	27.342	17.0	WNW. schw.	27.398	15.0	WNW. schw.	Morg. Reg. Sonne m.W.
10	27.399	15.0	S. still.	27.334	21.5	SSO. schw.	27.307	16.0	SO. stark.	Heiter.
11	27.287	18.0	SW. schw.	27.392	18.5	WNW. mitt.	27.456	15.6	WNW. schw.	Sonne mit Wolk. u Reg.
12	27.585	16.0	WNW. schw.	27.612	21.0	WNW. schw.	27.632	16.0	S. still.	Sonne mit Wolken.
13	27.654	16.0	OSO. still.	27.552	24.0	SSO. stark.	27.467	19.0	SO. schwach.	Heiter.
14	27.627	17.2	WNW. mitt.	27.635	16.4	W. schwach.	27.603	12.0	W. schwach.	Sonne m. W. schw. Reg.
15	27.530	14.0	SSO. still.	27.406	25.0	SO. mittelm.	27.405	18.0	SO. schwach.	Heiter, Abends Wetterl.
16	27.382	18.0	WNW. still.	27.314	26.6	NNW. still.	27.354	18.0	WNW. schw.	Heiter, Nachts Wetterl.
17	27.388	16.0	WNW. mitt.	27.381	15.2	NO. schw.	27.387	12.0	WNW. schw.	Trüb, Reg., Nachtsturm.
18	27.343	11.0	WNW. stark.	27.386	11.2	W. mittelm.	27.397	10.0	WNW. stark.	Trüb und Regen.
19	27.377	10.5	WNW. mitt.	27.368	12.0	WNW. stark.	27.389	10.2	WNW. stark.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
20	27.762	12.3	WSW. mitt.	27.336	15.0	NNW. schw.	27.328	11.5	SSW. schw.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
21	27.418	11.2	SSW. schw.	27.432	15.0	W. schwach.	27.464	13.0	WSW. schw.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
22	27.492	14.0	SW. schw.	27.496	15.0	WNW. schw.	27.513	12.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
23	27.532	12.0	NW. schw.	27.571	16.0	WNW. stark.	27.595	12.9	W schwach.	Sonne mit Wolken.
24	27.555	13.0	SW. schw.	27.539	19.0	WNW. schw.	27.509	13.6	W. mittelm.	Sonne mit Wolken.
25	27.581	14.0	W. mittelm.	27.488	19.0	W. mittelm.	27.475	19.0	WSW. still.	Sonne mit Wolken.
26	27.581	16.0	W. schwach.	27.482	19.0	W. stark.	27.492	1[illegible].5	W. still.	Sonne mit Wolken.
27	27.866	14.0	S. still.	27.515	19.0	OSO. schw.	27.442	15.0	SO. schwach.	dto. Nachts Wetterl.
28	27.344	14.0	W. schwach.	27.396	24.6	NW. schw.	27.475	18.3	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
29	27.568	17.0	WNW. schw.	27.601	19.0	W. schwach.	27.668	15.0	W. still.	Trüb.
30	27.376	14.4	W. still.	27.656	19.0	NO. still.	27.678	14.8	SO. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
31	27.662	13.8	WNW. still	27.604	18.0	N. still.	27.591	12.9	WNW. schw.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
Mittel	27.457	15.19		27.478	16.44		27.484	15.45		



Karte
über den Zug der Centralalpenkette im
Herzogthume Salzburg.
N
Voralpenkette
Voralpenkette
Laengenthal der Salzache
Pinzgau
Pongau
Ens Fl.
Radstadt
Tyrol
Steyermarkt
Lungau
Central Alpen Kette
Goldberg
Rathhaus B.
Rothgulden
Schellgaden
Mur Fl.
Flachau
Zauch
Tauern
Gastein
Grossarl
Kleinarl
Rauris
Fusch
Stubach
Felberthal
Hollersbach
Salzache
Wilde Gerlos
Zederhaus
Murwinkel
Langfeld
Idealer Durchschnitt
der Central Alpenkette im Herzogthume Salzburg.
Grofsglokner
Höchste Spitze der Centralkette
12000 par.
Kärnthen
Salzburg
Voralpenzug
Voralpenzug
8000 9000 par.
Salzachthal
Salzburg
1390 par.
M. Bauer sc.




Zeitschrift f. Phys. u. Math. B. VIII Taf. 4
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
M
N
O
P
Q
R
S
T
Z
H. Bauer sc.

